

5. 比較によらないソート・探索

(以下で説明するソートアルゴリズムの名称は、文献によって異なるので注意せよ。)

- ソートアルゴリズムが安定であるとは、キー（ソートに用いる情報）が同じ要素について、ソート前の順序を保つことをいう。
- バケットソート (bucket sort) またはビンソート (bin sort) は、キーの種類が限られている場合に、その種類の数だけのキュー（待ち行列）を用意し、各要素を対応するキューに入れ、順に取り出すことでソートするアルゴリズムである。
- 計数ソート (counting sort) は、キーの種類が限られている場合に、各要素の出現回数を数えることでソートするアルゴリズムである。

例えば、集合 $\{0, 1, \dots, m-1\}$ の要素からなる列の整列を考える。まず、要素 i が列に現れる回数 $c[i]$ を数える。このとき、要素 i はソートされた列の $\sum_{j=0}^{i-1} c[j] + 1$ 番目から $\sum_{j=0}^i c[j]$ 番目に現れる。この情報によって、元の列をソートする。

- 基数ソート (radix sort) は、バケットソートや計数ソートなどを繰り返し適用することでソートするアルゴリズムである。

例えば、10 進法で表された 3 桁の自然数の列を考える。まず一の位についてバケットソートや計数ソートなどでソートする。次に十の位、最後に百の位について同様にソートする。これによって全体のソートが完了する。

- 2 分探索 (binary search) は、ソートされた列から要素を探索するアルゴリズムである。相異なる要素からなる昇順にソートされた列 $a[1] < a[2] < \dots < a[n]$ を考える。この中から要素 x を探すとする。まず、 $m = \lceil n/2 \rceil$ として、探索する要素 x と列の中央の要素 $a[m]$ を比較する。一致すればそれで終了である。 $x < a[m]$ のとき、部分列 $a[1], a[2], \dots, a[m-1]$ に対して、 $x > a[m]$ のとき、部分列 $a[m+1], a[m+2], \dots, a[n]$ に対して、再帰的に同じ操作を繰り返す。部分列がなくなったら探索は失敗である (x は列 $a[1], a[2], \dots, a[n]$ の中にはない)。

問題

(解答に際して、その問題より前にある問題の結果を用いてもよい。)

- 5-1. 次の 1 以上 4 以下の自然数の組の列を考える。第 1 成分をキーとしてバケットソートによって昇順にソートし、その経過を図示せよ。

(2, 2), (1, 2), (2, 3), (4, 3), (3, 3), (3, 1)

5-2. 次の 1 以上 4 以下の自然数の組の列を考える．第 2 成分をキーとしてバケットソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．

(4, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (1, 1), (2, 4)

5-3. バケットソートが安定であることを示せ．

5-4. キーが m 種類であるとき， n 個の要素からなる列をバケットソートでソートするときの時間計算量が $O(n + m)$ であることを示せ．

5-5. 次の 1 以上 4 以下の整数からなる列を計数ソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．

1, 3, 4, 2, 1, 3, 2, 2, 4, 3

5-6. 次の 1 以上 9 以下の整数からなる列を計数ソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．

4, 4, 1, 2, 9, 1, 5, 4, 8, 7

5-7. 次の整数列を基数ソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．(バケットソートや計数ソートの経過は省略してよい．すなわち，一の位，十の位，百の位でソートした結果をそれぞれ書けばよい．)

783, 838, 624, 219, 198, 988, 267, 991, 139, 476

5-8. 前問と同様に，次の整数列を基数ソートでソートする経過を図示せよ．

512, 132, 227, 873, 507, 345, 467, 101, 781, 817

5-9. n 個の 3 桁の自然数の列を基数ソートでソートする．各桁でのソートにバケットソートを用いるとき，時間計算量は $O(n)$ であることを示せ．

以下，比較回数は要素の比較のみを考え，添字の比較は含まないとする．また，要素 a, b を 1 回比較した結果として， $a < b$, $a = b$, $a > b$ のいずれかが得られるとする．

5-10. 次の列から 43 を 2 分探索で探索する経過を図示せよ．また，比較回数は何回か？

31, 34, 43, 48, 57, 63, 75, 79

5-11. 次の列から 94 を 2 分探索で探索する経過を図示せよ．また，比較回数は何回か？

17, 19, 66, 74, 77, 86, 93, 95

5-12. n 個の相異なる要素からなるソートされた列から 2 分探索で要素を探索するとき，最悪の場合の比較回数は $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ であることを示せ．