

4. 再帰・ソート

問題

- 4-1. 再帰を用いて自然数 n の階乗 $n!$ を計算するアルゴリズムを書け .
- 4-2. 次のアルゴリズムは再帰を用いて 2 つの非負整数 a, b の積を計算するものである . このアルゴリズムが積 ab を正しく計算することを示せ .

```
function MULTIPLY( $a, b$ )
  if  $b = 0$  then
    return 0
  else if  $b$  が奇数 then
    return MULTIPLY( $2a, \lfloor b/2 \rfloor$ ) +  $a$ 
  else
    return MULTIPLY( $2a, \lfloor b/2 \rfloor$ )
  end if
end function
```

- 4-3. 次のアルゴリズムは再帰を用いて二項係数 $\binom{n}{k}$ を計算するものである . ただし , $0 \leq k \leq n$ とする . このアルゴリズムで $\binom{n}{k}$ を計算したとき , 関数 BINOMIAL が $N(n, k)$ 回呼び出されるとする . このとき , $N(n, k) \geq \binom{n}{k}$ であることを示せ .

```
function BINOMIAL( $n, k$ )
  if  $n = k$  or  $k = 0$  then
    return 1
  else
    return BINOMIAL( $n - 1, k - 1$ ) + BINOMIAL( $n - 1, k$ )
  end if
end function
```

- 4-4. 次の整数列 (*) をバブルソートによって昇順にソートし , その経過を図示せよ .

68, 63, 92, 93, 51, 98, 90, 28 (*)

- 4-5. 整数列 (*) を選択ソートによって昇順にソートし , その経過を図示せよ .

- 4-6. 整数列 (*) を挿入ソートによって昇順にソートし, その経過を図示せよ .
- 4-7. 整数列 (*) をヒープソートによって昇順にソートし, その経過を図示せよ .
- 4-8. 整数列 (*) をクイックソートによって昇順にソートし, その経過を図示せよ . ただし, ピボット (枢軸要素) として先頭の数を選ぶものとする .
- 4-9. 整数列 (*) をマージソートによって昇順にソートし, その経過を図示せよ .
- 4-10. n 個の要素の列を選択ソートによってソートするとき, 最悪時の比較回数は $O(n^2)$ であり, 最悪時の交換回数は $O(n)$ であることを示せ .
- 4-11. n 個の要素の列をマージソートによってソートするとき, 最悪時の比較回数を $C(n)$ とする .
- (a) $C(1) = 0, C(n) \leq C(\lfloor n/2 \rfloor) + C(\lceil n/2 \rceil) + n - 1$ ($n \geq 2$) であることを示せ .
- (b) $C(n) = O(n \log n)$ であることを示せ .
- 4-12. n 個の相異なる要素の列をクイックソートによってソートする . 要素の順序がランダムであるとき, クイックソートの比較回数の期待値を $C(n)$ とする . 便宜的に $C(0) = 1$ とおくと, 次の式が成り立つ*1 .

$$C(0) = C(1) = 1, \quad C(n) = n + 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C(i-1) + C(n-i)) \quad (n \geq 2).$$

このことを用いて, $C(n) = O(n \log n)$ であることを示せ .

*1 アルゴリズムの書き方によって漸化式は多少異なるが, 結論には影響しない .