アルゴリズム B 演習 No. 2 2012 年 10 月 19 日配布

2. 和と漸化式，基本的なデータ構造

問題

（解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい.）

2-1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = O(n^2)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = O(n^3)$ が成り立つことを示せ.

2-2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = O(2^n)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = O(1)$ が成り立つことを示せ.

2-3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = O(\log n)$ が成り立つことを示せ.

2-4. **フィボナッチ数列** $\{F_n\}$ を

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

で定義する．F_n の一般項を求めよ．また，$F_n = O\big(f(n)\big)$ となる簡単な関数 $f(n)$ を一つ与えよ.

2-5. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

で定義する．a_n の一般項を求めよ．また，$a_n = O\big(f(n)\big)$ となる簡単な関数 $f(n)$ を一つ与えよ.

2-6. $c > 0$ を実数とする．関数 $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ が

$$T(1) = 1, \quad T(n) = 3T(\lceil n/2 \rceil) + cn$$

で与えられているとする．ここで，$\lceil n/2 \rceil$ は $n/2$ の切り上げである.

(a) 関数 T が狭義単調増加であることを示せ.

(b) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = T(2^n)$ で定義する．a_n の一般項を求めよ.

(c) $T(n) = O\left(n^{\log_2 3}\right)$ であることを示せ.

2-7. n 個の整数が格納されている配列 a に対して，和 $\sum_{i=1}^{n} a[i]$ を求めるアルゴリズムを書け.

2-8. n 個の整数が格納されている配列 a と，整数 x に対して，$a[i] = x$ となる添字 i を求めるアルゴリズムを書け.（そのような添字 i が少なくとも一つ存在すると仮定してよい.）

2-9. 次の表で表される，「火」で始まり「木」で終わる単方向連結リストを考える．

アドレス	10	20	30	40	50	60
データ	月	火	水	木	金	土
ポインタ	30	50	60	0	10	40

リストの先頭を指すポインタは 20 であり，指し示す要素がないときポインタは 0 とする．いま，このリストの「土」の直後に新たなデータ「日」を挿入したい．データ「日」のアドレスが 70 であるとき，どのような操作をすればよいか述べ，その結果として得られるリストを上の表のように表せ．

2-10. 次の表で表される，「火」で始まり「木」で終わる双方向連結リストを考える．

アドレス	10	20	30	40	50	60
データ	月	火	水	木	金	土
先行要素へのポインタ	50	0	10	60	20	30
後続要素へのポインタ	30	50	60	0	10	40

指し示す要素がないときポインタは 0 とする．いま，このリストからデータ「金」を取り除きたい．どのような操作をすればよいか述べ，その結果として得られるリストを上の表のように表せ．

2-11. 次の操作を持つスタックを考える．

push(x)　スタックの一番上に x を挿入する．

pop　スタックの一番上の要素を返し，それをスタックから取り除く．

空のスタックに次の操作を行ったとき，スタックがどのようになるか答えよ．

$$\text{push}(5) \to \text{push}(6) \to \text{push}(2) \to \text{push}(1) \to \text{pop} \to \text{pop} \to \text{push}(3) \to \text{pop} \to \text{pop} \to \text{push}(4)$$

2-12. 次の操作を持つキュー（待ち行列）を考える．

enqueue(x)　キューの最後尾に x を挿入する．

dequeue　キューの先頭の要素を返し，それをキューから取り除く．

空のキューに次の操作を行ったとき，キューがどのようになるか答えよ．

$$\text{enqueue}(5) \to \text{dequeue} \to \text{enqueue}(2) \to \text{enqueue}(4) \to \text{enqueue}(3) \to \text{dequeue} \to \text{dequeue} \to \text{enqueue}(6) \to \text{enqueue}(1) \to \text{dequeue}$$