アルゴリズム B 演習 No. 1 2012 年 10 月 12 日配布

1. **位取り記数法と漸近記法**

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ を自然数全体の集合とする．b を 2 以上の自然数とする．自然数 n が

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b^i \quad (m \in \mathbb{N},\, a_i \in \{0, 1, \dots, b-1\},\, a_{m-1} \neq 0)$$

を満たすとき，$n = (a_{n-1} \dots a_1 a_0)_b$ と表し，これを n の ***b* 進表記**という．この記数法を ***b* 進法**という．

- $\mathbb{R}_{\geq 0}$ を非負実数全体の集合とする．関数 $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を考える．ある実数 $c > 0$ と自然数 n_0 が存在して，任意の自然数 n に対し，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow f(n) \leq cg(n)$$

が成り立つとき，

$$f(n) = O\bigl(g(n)\bigr)$$

と表す．

問題

（解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい．）

1-1. 2 進法で表された次の数を 10 進法で表せ．

(a) $(111)_2$ (b) $(1010)_2$ (c) $(11001)_2$

1-2. 10 進法で表された次の数を 2 進法で表せ．

(a) $(6)_{10}$ (b) $(19)_{10}$ (c) $(28)_{10}$

1-3. 10 進法で表された次の数を 16 進法で表せ．ただし，10, 11, ..., 15 を表すために A, B, ..., F を用いるものとする．

(a) $(372)_{10}$ (b) $(1000)_{10}$ (c) $(7837)_{10}$

1-4. b を 2 以上の自然数とする．任意の自然数 n に対して，

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b^i \quad (m \in \mathbb{N},\ a_i \in \{0, 1, \dots, b-1\},\ a_{m-1} \neq 0)$$

を満たす m と $a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$ が一意的に存在することを示せ.

1-5. 任意の整数 n は

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} a_i 3^i \quad (m \in \mathbb{N},\ a_i \in \{-1, 0, 1\})$$

の形に表せることを示せ．また，$n \neq 0$ のとき，$a_{m-1} \neq 0$ となる表示は一意的であることを示せ.（この記数法を**平衡三進法**という.）

1-6. 天秤と 1g, 3g, 9g, 27g の分銅が 1 個ずつあるとする．このとき，1g, 2g, ..., 40g の重さを量れることを示せ.

1-7. 関数 $f, g, F, G\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が，$f(n) = O\bigl(F(n)\bigr)$, $g(n) = O\bigl(G(n)\bigr)$ を満たすとする．次が成り立つことを示せ.

(a) 任意の実数 $c > 0$ に対して，$cf(n) = O\bigl(F(n)\bigr)$.

(b) $f(n) + g(n) = O\bigl(F(n) + G(n)\bigr)$.

(c) $f(n)g(n) = O\bigl(F(n)G(n)\bigr)$.

1-8. 関数 $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し，極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = M(< \infty)$$

が存在するとき，$f(n) = O\bigl(g(n)\bigr)$ であることを示せ.

1-9. 次の式が成り立つことを示せ.

(a) $n^2 + n + 1 = O(n^2)$.

(b) $\dfrac{n^3 + 2}{n + 3} = O(n^2)$.

(c) $2^{n+1} + n^{100} = O(2^n)$.

1-10. 次の式が成り立つかどうか，理由とともに答えよ.

(a) $2^{2n} = O(2^n)$.

(b) $(n+1)^3 - n^3 = O(n^2)$.

(c) $n\,|\sin n| = O(n)$.

1-11. 任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対し，$\log n = O(n^{\varepsilon})$ が成り立つことを示せ.

1-12. 任意の実数 $c > 1$ と，任意の自然数 k に対し，$n^k = O(c^n)$ が成り立つことを示せ.