ティーチング･アシスタント ライフサイクル仮説から動学モデルへ

「それじゃあ、ちょっと面倒だけれど、ライフサイクル仮説を数式で考えてみよう。

- ここで経済主体は2期間だけ生き、家計の若年期における消費をc_t^y、老年期における消費をc_{t+1}^oとし、効用関数を$u(c_t^y, c_{t+1}^o)$と表そう。つまり

そうすると u(リンゴ、ミカン)のように u(若年期の消費、老年期の消費)と書いているわけだ。

ここでの記号 c_{t+1}^o の意味は t 期に生まれた経済主体の老年期の消費であり、t+1 **期に生まれた経済主体の消費ではないことに注意が必要だ。ここで添字 O は Old、Y は Young を表している。**

- 次に予算制約式だ。若年期に Y^y 単位の、老年期に Y^o 単位の収入があたえられる。そうすると若年期の予算制約式は貯蓄を S として

$$Y_t^y = c_t^y + S \tag{1}$$

利子率を r として、老年期には

$$c_{t+1}^o = (1+r)S + Y_{t+1}^o \tag{2}$$

となる。貯蓄 S を消去すると

$$c_t^y + \frac{c_{t+1}^o}{1+r} = Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r} \qquad \text{(家計の予算制約式: 3)}$$

が得られる。これは何度も言っている最適消費計画の図で表されるね。」

― 第 III 章でも出てきましたね。

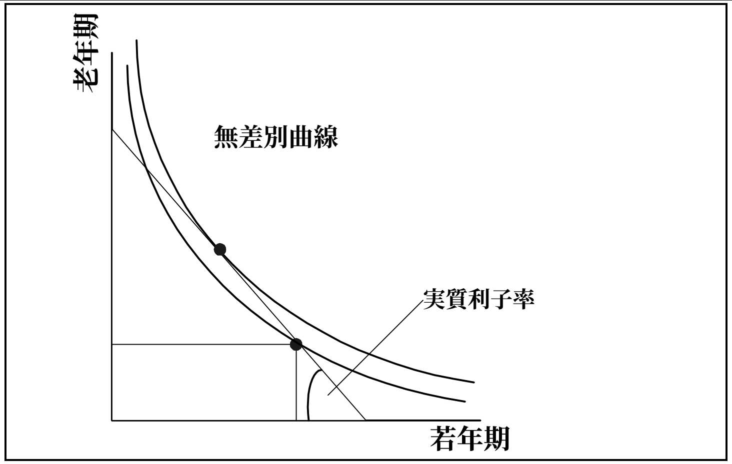
「そうだ。たとえば以下の効果が図■を使って簡単に分析できる。

- 所得の効果は予算制約式が右上方にシフトすることで表されるね。
- しかし利子率の効果(予算制約式の勾配が変化する)は所得効果と代替効果のどちらが大きいか分からない。」

多期間モデルから無限期間動学モデルへ

― このライフサイクル仮説の 2 期間モデルはそれなりに理解できますけど、でも人生は 2 期間じゃありませんよね。

「そうなんだね。貯蓄や投資決定の問題は若年期と老年期、あるいは現在と将来の 2 期間モデルで扱われているが、もちろん問題は本来、このように単純じゃない。多期間どころか無限の彼方まで計画期間を考えなければならないか、あるいはいつ死ぬか分からないので、毎日生涯の消費計画を考え直さなければならない。



図■: 教授の板書 ● 2 期間モデルにおける生涯の消費可能線

このように時間を通じて、毎日計画を順々に立直す性質がマクロ経済学の動学最適化問題では重要であり、この**逐次決定**を考察する必要が生じる。」

― ミクロ経済学の効用最大化問題では、結局、ミカンとリンゴの購入量を同時に決めているわけですよね。

「そうそう、いい例だ。逐次決定では、ミカンを買ったあとに、リンゴをどのくらい購入するのかを考えることが必要となってくる。そこで通常の無限期間動学モデルへ橋渡しするために、以下の代表的消費者の多期間動学的最大化問題を考えよう。

$$\max U = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t) \quad \textit{subject to} \quad A_{t+1} = (A_t + d_t - c_t)(1+r_t)$$

$$t=0,1 \cdots T, \quad A_0 = \bar{A}_0 \tag{4}$$

であり、ここで c_t は t 期の消費、A は資産、d は配当、r は利子率、β は主観的割引要素だ。

― Σ がついていますけれど・・・。

「目的関数を書き下すと

$$u(c_0) + \beta u(c_1) + \cdots\cdots + \beta^t u(c_t) + \beta^{t+1} u(c_{t+1}) + \cdots\cdots + \beta^T u(c_T) \tag{5}$$

だね。各期の予算制約式に付随するラグランジェ乗数をλ_t と表記して、動学的なラグラ

ンジェアンを書き下すと、

$$u(c_0)+\lambda_0[A_1-(A_0+d_0-c_0)(1+r_0)]+\cdots+\beta^t u(c_t)+\lambda_t[A_{t+1}-(A_t+d_t-c_t)(1+r_t)]$$
$$+\beta^{t+1}u(c_{t+1})+\lambda_{t+1}[A_{t+2}-(A_{t+1}+d_{t+1}+c_{t+1})(1+r_{t+1})]\ \cdots\ +\beta^T u(c_T) \quad (6)$$

だ。ここで d や r はこの消費者にとって所与とすると、未知変数は0期から T 期までの c_t, A_t, λ_t だね。

まず c_t で微分して

$$\beta^t u'(c_t)-\lambda_t(1+r_t)=0 \quad (7)$$

次に A_{t+1} で微分して

$$\lambda_t-\lambda_{t+1}(1+r_{t+1})=0 \quad (8)$$

だね。」

― どうして A_t じゃないんですか。

「t 期には A_t は所与で、次期の資産額 A_{t+1} を選ぶからだね。少し上級のことを言えば、このような A_t は動学モデルでは**状態変数**と呼ばれるもので、c_t は**操作変数**だね。**状態変数**とはある時点では**操作変数**の影響を受けないが、次の時点に移るときに影響を与える変数で、状態変数の異時点間の動きを表すものが**遷移式**だ。

目的関数に入って、効用をもたらす消費だけでなく、逐次決定だからどのようにお金を残していくか、その残し方にも条件を加えなくては最適と言えない。」

― 具体的にはどう解くんですか。

「さて t 期に成立する式は1期ずらして、t+1期にも成立する。この点は動学モデルの解き方のポイントの一つだね。

$$\beta^{t+1}u'(c_{t+1})-\lambda_{t+1}(1+r_{t+1})=0 \quad (9)$$

(7)と(9)を(8)にそれぞれ代入して、一階条件は

$$u'(c_t)=\{\beta(1+r_t)\}u'(c_{t+1}) \quad (10)$$

となる。これが通常よく推定される**オイラー方程式**だ。実証研究では r と c を実際のデータからとって、効用関数のパラメーターである β と σ を(非線形)推定するんだね。このオイラー方程式を直接推定する方法は現時点では当然のように広まっているが、それまでの消費を所得に回帰するなどの方法とは全然違う。この方法は、その後の**マクロエコノメリックス**の発展に大きく寄与したんだ。」

― ホールの議論はランダム・ウォーク仮説と言うんですよね。

「そうだね。まずもともとのホールの定式化では確率的ショックが導入されている。それからホールは上式で $\beta(1+r)=1$ とおいて、二次効用関数 $c^2/2$ を仮定すると、限界効用は c となり、u_t をショックとして消費は

$$c_{t+1}=c_t+u_t \quad (11)$$

のように**ランダム・ウォーク**となるんだね。」

― この結果は一般的なんですか。

「少し、読者を驚かせてやろうというところもあるね。普通は二次効用関数の代わりに相対的危険回避度一定の効用関数を仮定して、問題は

$$\max U=E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\{\frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\} \quad subject\ to \quad A_{t+1}=(A_t+d_t-c_t)(1+r_t) \quad (12)$$

であり、一階条件の非条件付き期待値をとると、

$$E\{\beta(1+r_t)\}(\frac{c_{t+1}}{c_t})^{-\sigma}=1 \quad (13)$$

となる。ここで利子率と消費の成長率は σ が正ならば正の相関が示される。」

― いずれにせよ、時間を通じた動きを理解しなくてはならないわけですね。

「そうだね。このような差分方程式は動学的な最適化問題の解として導出される場合が多い。最適成長モデルなど、動学的な最適化手法により分析されるモデルでは、最適性の条件は通常、

[A] **オイラー方程式**と呼ばれる**差分方程式**(問題が連続型の場合は微分方程式)と

[B] **横断性条件**など**端点条件**

で示される。つまり

[a] 今日の消費 c_t と明日の消費 c_{t+1} はどのような関係でなくてはならないか、という変化率を示す差分方程式だけでは充分でなく

[b] 水準を考える端点条件 $A_0=\bar{A}_0$ が必要だ。

ホール (1978)のモデルに戻ると、解の条件は $E_t c_{t+1}$ を c_{t+1} の期待値として $E_t c_{t+1}=c_t$ で表される最も単純なオイラー方程式である。しかしこれでは消費が月額10万円であれば、来月の予想消費も10万円と言うように、現在と将来の変化を示しているに過ぎない。月額50万円であれば、来月の予想消費も50万円という関係も差分方程式を満たすわけである。そこで初期値などの端点条件が必要なんだね。」