経済学のための数学 I　微分ならびに最大･最小

以下は､経済学や計量経済学に最低限必要な微分法ならびに関数の最大･最小などの数学的知識の要約です。より詳しくは､本論末尾の参考文献を参照してください。

経済学のモデル分析では

- 家計の効用最大化問題や企業の利潤最大化問題などの最適化問題を定式化し、
- 内生変数を偏微分して得られる最適化条件からなる連立方程式を、
- 市場均衡式等の助けを借りて明示的に解いたり、解けない場合は最適解の性質を定性的に考察する作業を行います。

ポイントは連立方程式を解くことにありますが、その構成要素である個々の方程式は最適化問題を偏微分して得られる式となります。最適化とは、接線を引いて微分することであり、連立方程式を要領よく解くためには線形代数(ベクトルと行列)の知識が必要です。

A. 準備

◆ ギリシア文字の読み方 (ギリシア文字を使うとは空想的な意味合いがある)

α (アルファ), β (ベータ), γ (ガンマ), Δ(デルタ(大文字)), δ (デルタ(小文字)), ε (イプシロン), φ (ファイ), η (エータ), θ (シータ), λ (ラムダ), Σ(シグマ(大文字)), σ(シグマ(小文字)), τ (タウ), ρ (ロー), π (パイ), μ (ミュー), ξ (グザイ), ψ(プサイ)

◆ 等比数列及び等比級数

数列$a(n)$が､任意の自然数nに関して$a(n+1)=ra(n)$, $a(1)=\overline{a}$を満たすとき､それを**等比数列**と呼ぶ。そして､このとき､rは**公比**､$\overline{a}$は**初項**と呼ぶ。[1]

(i) **等比数列の第n項までの和**: 初項がa､公比がrである等比数列$a(n)$の第n項$a(n)$は$a(n)=ar^{n-1}$です。この数列の第n項までの和を$S(n)$で表すと、

$$S(n)=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$$

であり､$S(n)$に r をかけた $rS(n)$を $S(n)$から引いて、$S(n)-rS(n)$を計算すれば､$(1-r)S(n)=a(1-r^n)$となります。そこで$r\neq1$のとき､

$$S(n)=a(1-r^n)/(1-r)$$

であり､$r=1$のときは明らかに$S(n)=an$となります。

(ii) **無限項の等比級数の和**: (i)の等比数列$(a(n))$の無限項の和Sは$|r|<1$の場合を**等比級数**といいます。この等比級数の和Sは､(i)で求めた等比数列の第n項までの和の公式で､r^nは$|r|<1$でnが無限大の場合0になりますから､以下のように求められます。

$$S=a+ar+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots=\frac{a}{1-r}$$

★ 現在価値

いま100円持っているとしましょう｡銀行に預けると名目利子率が1割ついて、来年には110円になるとします｡このとき銀行に預ければ110円になることが分かっているから現在の100円と1年後の110円とは同じ価値である｡これが現在価値の考え方である｡つまり現在のP円(100円)は利子率r(1割)のもとでは､将来のA円(例では110円)に等しい｡$P(1+r)=A$を書き換えると以下の式になる。$P=\dfrac{A}{1+r}$

★ 等比数列の例 [コンソル債の価格]

マクロ経済学で扱われる**コンソル債**とは毎期A円の利子収益を永遠に保証するものである。その価格Pは毎期の収益Aの流列の**割引現在価値**に等しい。利子率をr $(0<r<1)$とすると､初項は$A/(1+r)$であり､公比は$1/(1+r)$の等比数列として､以下のようにコンソル債の価格が表される。[2]

---

[1] **数列**とは数の並びであり、**自然数**とは｛0,1,2･･･｝のような数であるが、厳密な定義は難しい。

[2] 動学マクロ経済学では無限視野の効用関数を使う。このとき割引要素$\rho\leq1$と仮定するが、これは目的関数の発散を防ぐためである。目的関数が無限大になってしまえば、最大値を求める最大化問題は意味を成さない。

$$P=\frac{A}{1+r}+\frac{A}{(1+r)^2}+\frac{A}{(1+r)^3}+\ldots\ldots=\frac{A}{1+r}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{1+r}}\right]=\frac{A}{r}$$

◆ 実係数の二次方程式の根

$ax^2+bx+c=0$,(a,b,c は実数)の根は、$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

という解の公式はよく知られています。この公式を導出はまず変形して

$$x^2+(b/a)x+c/a=0,$$

さらに変形して$(x+(b/2a))^2=(b/2a))^2-c/a$ となる。平方根をとって、解の公式が導き出されます。

◆ 実正数にかんする不等式: 相加平均、相乗平均

今、x、y を正の実数とするとき、$(x+y)/2\geq\sqrt{xy}$ (等号成立は $x=y$ のとき)が成立する。

考えよう A-1 ● x、y を正の実数として、$(x+y)/2\geq\sqrt{xy}$ を証明しなさい。

◆ パラメーター(助変数)

関数の中にある変数を組み込んで考察するが、通常はその変数の値を固定して考察を進める場合、独立変数と区別してパラメーターという。$Y=L^{1-\theta}K^{\theta}$ という生産関数の場合、要素集約度を表すθ がパラメーターにあたる。

◆ 関数と写像

写像(mapping, map)とは、2 つの集合が与えられたときに、一方の集合の各元に対し、一つずつ他方の集合の元を指定して結びつける対応関係のことです。

$$f: X\to Y$$

と表しますが、集合 X の各点 $x\in X$ を集合 Y の(一つの)点 $f(x)\in Y$ に対応させるものを**写像**といいます。解析学に表れる点と点を対応させる写像は、しばしば**関数**と呼ばれます。このとき x を**独立変数**といい y を関数、あるいは**従属変数**(dependent variable)といいます。

独立変数がとりうる値の全体を**定義域**といい、独立変数が定義域のあらゆる値をとるときに、従属変数がとりうる値を**値域**といいます。

◆ 集合・命題等の記号

- **集合**(set)A に**要素**(element)x が属している(属していない。)$x\in A$, ($x\notin A$)

- **真・偽**のどちらかが客観的に判断できる主張を**命題**(Proposition)という
- $\forall x\varphi(x)$: $\varphi(x)$がすべての x について成立する (All をひっくり返して)
- $\exists x\varphi(x)$: $\varphi(x)$がある x について成立する (Every をひっくり返して)
- $\forall\delta>0$, $\exists\varepsilon$: すべての 0 より大きなδ と、ある$\varepsilon(>0)$に対して・・・・

- R : すべての実数の集合 (数直線で表される。)
- R_+ : $\{x\in R\ |x\geq 0\}$ ゼロを含む
- R_{++} : $\{x\in R\ |x>0\}$ ゼロを含まず
- R^n : n **次元実ベクトル(線形)空間** (Vector (Linear) Space)
  実数 n のベクトルからなるベクトル空間(n 個の R の直積 $R\times R\times\times R$)
- N : すべての正の自然数の集合
- Q : すべての有理数の集合
- C : すべての複素数の集合

$$\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\cdots\cdots\cdots\cdots\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{循環小数}\end{cases}\\ \text{無理数}\cdot\cdot\text{循環しない無限小数}\end{cases}$$

- 効用関数 U の定義域は消費集合 $X\subset R^n$ であり、値域は実数直線 R である。

  関数 U: $X\to R$

  2 財経済ならば $X\subset R^2$ です。n 財経済ならば、効用関数は n 個の財の消費量の組み合わせについて、1 つの数値である効用を定めるという意味ですね。

- 生産関数 f は k 種類の生産要素が使われるとすると、定義域は k 次元ベクトル空間の非負象限 R_+^k であり、値域は非負の実数の集合 R_+である。投入量 $x\in R_+^k$ のもとで、産出量 $f(x)\in R_+$で示され、生産技術は f: $R_+^k\to R_+$で表される。

B. 関数の極限と微分

◆ なぜ微分は重要か?

経済学では**微分**が多用されます。なぜこのような面倒な数学が必要なのでしょうか。その理由は「**限界**」(Marginal 追加の 1 単位)という概念にあります。エコノミストの金森久雄氏は学生時代の経済学の授業で、カツ丼を一杯食べる時の満足度(「効用」)と 2 杯･3 杯と続けて食べる時の一杯当たりの満足度は違う、と習ったと述べています。つまり、

- [効用関数] 消費者の満足度を表す効用関数において、数量が増加すればだんだん追加的な満足度が小さくなってゆくわけですね。また
- [生産関数] 企業が労働者を雇う場合も、最初の一人の労働者と、10 人目の労働者の働きの効率性(限界生産性)を比べれば、10 人目は小さいでしょう。

このように経済学では「**追加的な増分**」を考えるので、微分、つまり微小な増分が重要と考えるのです。微小な増分を表す記号であるΔを使って、説明されることがありますが、このΔx を無限に小さくしたものが以下の微分の定義です。

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$$

◆ 極限

x, a が共に実数直線のある区間 I の要素であり、x が a 以外の価を取りつつ、a に限りなく近づくにつれ、関数 $f(x)$が b に近づくとき、$x \to a$ ならば $f(x) \to b$ あるいは、$\lim_{x\to a} f(x)=b$ と書く。今、この b が $f(a)$に等しいとき、$f(x)$は $x=a$ で**連続**であるという。すなわち f が区間 I の中の 1 点 $x=a$ で**連続**であるとは

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

が成立することです。[3]

★ **数列の極限** $1/2^n$ の n を無限大にしてみよう。分母である 2^n は限りなく大きくなるので、$1/2^n$ は限りなく小さくなる。そこで $\lim_{n\to\infty}\left(1/2^n\right)=0$ が成り立つ。

◆ 微分

微分可能: 区間 I で定義された実数値連続関数が $x=a$ で**微分可能**とは、極限値 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が a に収束する**点列**の選び方にかかわらず一意に決まることである。これと同値だが、$h=x-a$ とおくと、**微分可能**とは $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在することであり、この極限値を $f'(a)$と表す。

連続と微分可能の違い: なお連続と微分可能は同値ではありません。図で連続だが、屈折している点では微分不可能な関数が示されていますが、これは右側から近づくときと左側から近づくときでは極限値は異なります。このとき極限値 $f'(a)$が存在するとは言いません。

f が区間 I の各点 x で微分可能であるとき、x に対応する f の微分係数 $f'(x)$を f の**導関数**といい、$\frac{df}{dx}$, f', $\frac{dy}{dx}$ (ただし $y=f(x)$)などと表します。

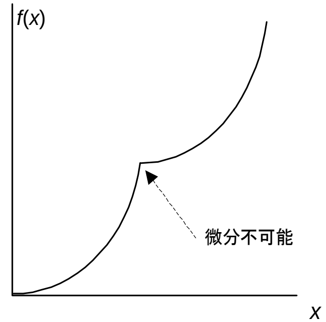


図1 連続だが微分不可能

微分係数は x の変化($x-a$)と y の変化($f(x)-f(a)$)の比率であることに注意。

◆ 自然対数の底 e

しばしば自然対数の底, $e \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (約 2.7128)という便利な数が使われます。この e を底とする指数関数 e^x (あるいは exp(x))と書かれることもあります)を微分しても同じ指数関数 e^x となり、大変便利です。逆に言えば、e とは微分しても同じ元の関数になる数値を底として求めたわけです。

---

3 「限りなく近づく」とはかなりあいまいな表現である。厳密に証明などを行う場合、いわゆるε-δ 法が使われる。これらの高校数学とε-δ 法の断層を埋める田島(1981)は分かりやすい解説書である。

導出法を簡単に説明しましょう。a^x の微分の定義を書くと $\frac{d(a^x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$ ですが $\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$ は $\frac{a^x(a^h-1)}{h}$ と書き直せます。ここで $\frac{a^h-1}{h}$ が 1 ならば、微分しても同じ a^x となるでしょう。そこで $\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$ は $a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ と考えられますが、$\frac{a^h-1}{h}$ が 1 であるような a を考えてみる。すると $a=(1+h)^{1/h}$ であり、この極限をとって $\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$ を e と定義します。$n=1/h$ を代入すれば、自然対数の定義が得られるわけですね。

⇒ 対数関数を使うと割り算や掛け算を、引き算や足し算として計算できます。

考えよう B-1 ● 関数 $y=\exp(ax)$について、指数関数の微分と合成関数の公式を使って、$\frac{dy/dx}{y}$ を計算しなさい。x を時刻､y を産出量と考えると y が $\exp(ax)$ に従うのはどういう状況か､言葉で説明しなさい。

◆ 重要関数の微分公式

経済学では､以下のような特定の関数形が使われることが多いものです。

[1: べき乗]　$f(x)=x^n$ (n 実数)のとき $f'(x)=nx^{n-1}$ ⇒ コブ=ダグラス型関数 L^aK^{1-a}
⇒ 相対的危険回避度一定の関数
[2: 対数]　$f(x)=\log x$ のとき､$f'(x)=1/x$ ⇒ 対数型効用関数
[3: 指数]　$f(x)=e^x$ のとき､$f'(x)=e^x$ ⇒ 絶対的危険回避度一定の関数
[4]　$f(x)=\log_a x$ のとき､$f'(x)=1/(x\log a)$
[5]　$f(x)=a^x$ のとき、　$f'(x)=a^x\log a$

これらの特定の関数形の使用は計算が容易という理由だけでなく､理論的な整合性や実証的な事実に基いた結果でもあることに注意してください(コラム参照)。

★ **微分の例** 1［**限界生産力**］: ある企業の生産関数を生産要素 x の関数として $f(x)$ と表しましょう。$x=a$ におけるこの企業の限界生産力は $f'(a)$で与えられますね。具体的な例として $f(x)=3x^2$ とすると、べき乗の微分ですから $f'(x)=6x$ となります。また $x=50$ における限界生産力は $f(50)=300$ となるわけですね。

★ **微分の例** 2［**需要の価格弾力性**］: ある財の市場需要関数を $x=D(P)$(P:価格､x:需要量)と表しましょう。このとき需要の価格弾力性ε は $\varepsilon=-\frac{dx/x}{dP/P}$ で与えられます。具体的に市場需要関数が $x=20-2P$ で与えられたとき､$x=10$ における需要の価格弾力性ε は 1 となるわけですね。

考えよう B-2 ● 需要関数 $x=P^{-\varepsilon}$ は価格弾力性一定であることを確かめなさい。
考えよう B-3 ● コブ=ダグラス型関数はさまざまな便利な特性を持つことが知られています。$Y=L^{1-\theta}K^{\theta}$ のとき、利潤最大化する企業の労働分配率(WL/Y)は一定であることを確かめなさい。

◆ 微分の演算公式

(1) $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$のとき　$f'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)$
(2) $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$のとき　$f'(x)=f_1'(x)-f_2'(x)$
(3) $f(x)=f_1(x)f_2(x)$のとき $f'(x)=f_1'(x)f_2(x)+f_1(x)f_2'(x)$
(4) $f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ のとき $f'(x)=\frac{f_1'(x)f_2(x)-f_1(x)f_2'(x)}{(f_2(x))^2}$
(5) $y=f(x)$, $z=g(y)$のとき　$\frac{dz}{dx}=g'(f(x))f'(x)$

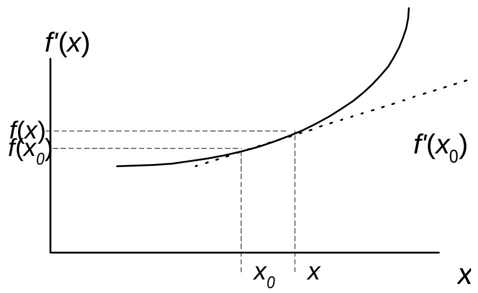
◆ テイラー展開

微分可能な任意の関数 $f(x)$は

$$f(x)\cong f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

と近似されるが､この式は変形すると分かるように微分の定義 $\lim_{x_0\to x}\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ から導かれます。

以上は一変数関数の一階近似であるが、ベクトルや一階以上に拡張されます。たと



$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

えば x,y を**ベクトル**と考えても

$$f(y)=f(x)+Df(x)(y-x)+(1/2)\,(y-x)^2D^2f(w)$$

ここで w は x と y の間の線上の点であるし､右辺の最終項はさらにもっと展開できる。

なお自然対数の底 e は以下のように展開できます。

$$e^x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\ldots\ldots$$

◆ 対数差分と成長率

対数を取って差分を取る(あるいは時間で微分する)と変化率になる。この意味は後にテイラー展開を使って考えることができる。

$$\log(x)-\log(y)\approx(x-y)/y$$
$$\log(x_{t+1})-\log(x_t)\approx(x_{t+1}-x_t)/x_t$$

- なお自然対数の底 e (後述)を底とした対数 $\log_e x$ を $\ln x$ と表記することがある。

考えよう B-4 ● テイラー展開により、$\log(x)-\log(y)\approx(x-y)/y$ を導出しなさい。

C. 関数の最大・最小

◆ 一階の条件と極値

さて効用最大化問題や利潤最大化問題で微分を使う理由は、最適値を求めるためです。まず図 III-1 で釣り鐘型の関数 $f(x)$の最大値を考えてみましょう。ここで関数の接線を $f(x)$上の様々な点で引いてみると、

ちょうど $f'(x)=0$ となる点 x_0 で最大値となっている

ことが分かります。つまり $f'(x)$が正ならば、点 x の近くで傾きが正、すなわち x が増加(減少)するときに、$f(x)$も増加(減少)しているのです。

ところが一階の条件 $f'(x)=0$ が成り立っても、そこが必ずしも最大値とは限りません。ちょうど $f(x)$を上下逆にしたような関数では逆に x_0 は最小値となるし、上がったり下がったりする関数の場合は $f'(x)=0$ となるような点は多数あります。それゆえ x のような $f'(x)=0$ となる点を**極値**といいますが、これでは最大値であるか最小値であるかはもちろん、極値の近くで一番大きい、つまり**極大値**であるかあるいは**極小値**であるかすらわかりません。判定するためには**二階の条件**というものが必要なのです。

◆ 微分と最大化問題

さて微分による最大値の求め方を、企業の利潤最大化問題に即して説明してみましょう。図 III-2 の上側には売り上げ($Pf(L)$)と費用 WL が描かれています。このままでは最大値は分かりませんが、下側の図では利潤($Pf(L)–WL$)が描かれていて、その最大値が単一の生産要素 L で微分した点となっていることが分かります。

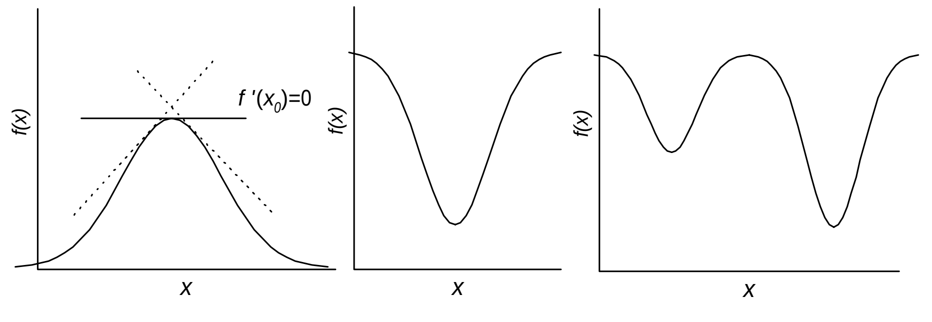


図 III-1 **最大値**　　　**最小値**　　　**極大・極小値**

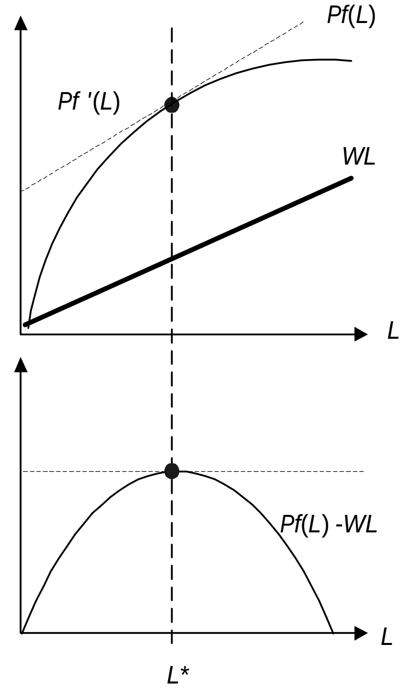


図 III-2: **企業の利潤最大化**

◆ 二階の条件

そこで次に、今度は $f(x)$ではなく $f'(x)$の傾き $f''(x)$を考えてみましょう。そうすると、$f'(x)$が x の増加・減少を示したように、今度は $f''(x)$は $f'(x)$の増加・減少を示します。ここで先の図 III-1 をまた見ると $f'(x)=0$ となる点 x_0 の近くでは x の増加とともに接線の傾きが減少しつつあり、x_0 で傾きはゼロとなったあと傾きは負になっている。つまり、図 III-3 に示されるように接線の傾きは x_0 を境に、正から負へと変わっています。このような点 x_0 を**極大値**といいます。

それゆえ極大値の**必要条件**は

$f'(x)=0$　　一階の条件

$f''(x)\leq 0$　　二階の条件　　です。

(逆に、極小値では、接線の傾きは x の増加とともに負から正に変わるので $f''(x)\geq 0$ となる。)

D. 偏微分および全微分

◆ 多変数関数と偏微分

これまで考えたのは 1 変数の関数でした。しかし効用関数 $u(c_1,c_2)$や生産関数 $f(x,y)$は要素が複数の**多変数関数**です。この場合、変数 x や y など 1 つの変数だけ微小に増加した場合をどう考えるのでしょうか。この場合、**偏微分**といっ

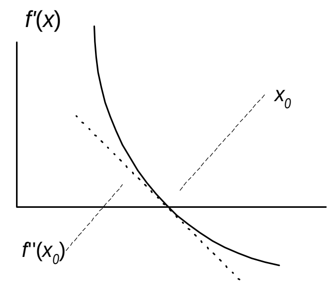


図 III-3　$f'(x)$の傾き

て x だけ、あるいは y だけの変化を考え、$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ などのように表記されます。x で偏微分するためには、変数 y を定数と見なして x で微分すれば良いのです。以下の例を自分で確かめてください。

★ **偏微分の例** 1 ［**限界効用**］: 効用関数が $u(x_1, x_2)= x_1^{1/2}x_2^{1/2}$ のとき、

第 1 財の限界効用は x_1 で偏微分して $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{1/2}$、

第 2 財の限界効用は x_2 で偏微分して、$\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^{1/2}$ となります。

★ **偏微分の例** 2 ［**限界生産力と利潤最大化問題**］:

先の企業の利潤最大化問題を生産関数を 2 変数関数 $Pf(L,K)$に拡張して、再考してみましょう。

まず限界生産力を求めましょう。生産関数 $y=L^{1/2}K^{1/4}$ のとき、

労働 L の限界生産力 $\dfrac{\partial y}{\partial L}=(1/2)\,L^{-1/2}K^{1/4}$、

資本 K の限界生産力 $\dfrac{\partial y}{\partial K}=(1/4)\,L^{1/2}K^{-3/4}$

となります。さて企業の利潤最大化問題では利潤($Pf(L,K)–WL–rK$)を L と K で偏微分して、

$$P\frac{\partial y}{\partial L}-W=0,\quad P\frac{\partial y}{\partial K}-r=0$$

が成り立ちますね。労働で偏微分した式は資本の量にも依存していますし、資本で偏微分した式は労働の量にも依存しています。つまり内生変数は L と K の 2 つ、式は 2 つですから、連立方程式を解くと解 ($L^*=P^4/(32rW^3)$, $K^*=P^4/(64r^2W^2)$)が得られます。

考えよう B-5 ● 図 III-2 に倣って、3 次元の図を描きなさい。

考えよう B-6 ● $y=L^{3/4}K^{1/4}$ のとき、連立方程式は解けないことを確かめなさい。一方 L/y, K/y は求めることができるので、求めなさい。

4 より正確には平面を R^2 とかき、そのある領域 G で定義された 2 変数の関数 f を $y=f(x_1,x_2)$(ただし$(x_1,x_2)\in$ G であり、$y\in R$ である)とかくことにする。

◆ **多変数関数の連続と偏微分・全微分**

2 変数の関数 f を $y=f(x_1,x_2)$とし、x_1–x_2 平面上の 1 点 $a=(a_1,a_2)$と $x=(x_1,x_2)$との**距離**を

$$\|x-a\|=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2} \qquad (1)$$

で定義する。[4]

今、$\|x-a\|$が限りなくゼロに近づくとき($\|x-a\|\to 0$)、x は a に**収束する**というが、

$$\|x-a\|\to 0 \text{ ならば } f(x_1,x_2)\to f(a_1,a_2)=0 \qquad (2)$$

が成立するならば、f は点 $a=(a_1,a_2)$で**連続**であるという。

偏微分係数: R^2 のある領域 G で定義された関数 $y=f(x_1,x_2)$が、G 上の点 $a=(a_1,a_2)$において、極限値$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+h,a_2)-f(a_1,a_2)}{h}$が存在するとき、これを点 a における f の x_1 に関する**偏微分係数**といい、$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)$と表す。すなわち、

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+h,a_2)-f(a_1,a_2)}{h}$$

同様に、点 a における f の x_2に関する偏微分係数を$\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)$と表記する。

偏導関数: ここで $a=(a_1,a_2)$を G の任意の点と考え、$f(x_1,x_2)$が G の任意の点で偏微分係数をもつとすれば、$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)$は$x=(x_1,x_2)$に実数を対応させる関数であると考えることができる。この関数を f の G における**偏導関数**といい、$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ などと表す。

全微分: 関数 $y=f(x_1,x_2)$は R^2 のある領域 G で定義されているものとする。で $h=(h_1,h_2)$,$a=(a_1,a_2)$とするとき、関数 $y=f(x_1,x_2)$が $x=a$ で**微分可能**(あろいは**全微分可能**)とは $\|h\|\to 0$のとき$\dfrac{g(h)}{\|\cdot\|}\to 0$が成立し、かつ $f(a+h)-f(a)=f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)$ $=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2$が成立する、ことである。もちろん $g(h)=g(h_1,h_2)$:$R^2\to R$ への関数であり、$\|\cdot\|$は距離である。通常、$h=(h_1,h_2)$のかわりに $dx=(dx_1,dx_2)$として、上式の a で微分可能ということを$dy=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2$と書いたりする。もちろん、$y=f(x_1,x_2)$が G の任意の点で微分可能ならば、上式をさらに簡単化して、$dy=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$と書く。

◆ 全微分と限界代替率

偏微分は多変数関数の中で 1 変数だけを動かすものでした。すべての変数が動く場合はどうなるでしょうか。これを**全微分**といいます。微分の中でも偏微分と全微分を勉強すれば、さまざまな概念と対応していることが分かります。

★ **全微分の例** 1: [**限界代替率**] 効用関数 $u(c_1,c_2)$を

- c_1 で偏微分すると**限界効用** $\dfrac{\partial u}{\partial c_1}$ が得られ、
- **全微分**すると $du=\dfrac{\partial u}{\partial c_1}dc_1+\dfrac{\partial u}{\partial c_2}dc_2$ となります。ここで u を一定($du=0$)とすると、**限界代替率**は $-\dfrac{dc_2}{dc_1}=\dfrac{\partial u}{\partial c_1}/\dfrac{\partial u}{\partial c_2}$ と計算でき、

「限界代替率は c_1 の限界効用を c_2 の限界効用で割った比」

に等しくなります。

なお図からも明らかなように、限界代替率=価格比

$$-\frac{dc_2}{dc_1}=\frac{\partial u}{\partial c_1}/\frac{\partial u}{\partial c_2}=\frac{P_1}{P_2}$$

が成立し書き直して、$\dfrac{\partial u}{\partial c_1}\Big/P_1=\dfrac{\partial u}{\partial c_2}\Big/P_2$ が成立します。つまり 1 円あたりの限界効用が等しくなるように、消費の組み合わせが選択されています。

★ **全微分の例** 2: [**技術的限界代替率**]: **技術的限界代替率**とは、産出量水準が一定のもとでの生産要素 x_1 と x_2 の代替比率です。生産関数が $y=f(x_1,x_2)$を全微分すると $dy=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$ が得られます。産出量水準一定($dy=0$)という想定のもと、$dy=0=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$ となり、限界代替率は $-\dfrac{dx_2}{dx_1}=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}/\dfrac{\partial y}{\partial x_2}$ と計算できます。上式右辺は、限界生産力の比ですから、

技術的限界代替率=生産要素間の限界生産力比

となります。

◆ 陰関数定理

$x^2+y^2+xy=0$ のように独立変数と従属変数とが混ざり合ったり、どちらがどちらであるか明示的に示されない数式によって両者の関係が表現されている場合を**陰関数**と呼びます。たとえば円の形のグラフであっても、接線は引けますね。明示的に「$y=$ 」の形にできなくとも、全微分を使って微分ができる場合があります。

例 $x^2+y^2+xy=0$ のとき、$\dfrac{dy}{dx}$ を求める。全微分して $(2x+y)dx+(2y+x)dy=0$ より、

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{2y+x}$。

◆ 同次関数と完全分配の定理

一つの工場で生産量を増大させるほうが良いのか、工場を新たに建てたほうが良いのか考えてみましょう。工場あたりの生産関数を $f(x)$と書くと、生産量を 2 倍にしたいとき $f(2x)$か $2f(x)$のどちらが大きいか調べればいいのです。一般化して

$$f(tx)=t^kf(x)$$

のような式が成り立つとき、k **次同次関数**といいます。たとえば予算制約式は価格ベクトルに関して 0 次同次であり、生産関数は 1 次同次であると仮定することが多いものです。**オイラーの定理**とは関数 $f(x)$が

$$kf(x)=\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}x_n$$

が成り立つことです。

生産関数は一次同次($k=1$)と仮定されることが多いのですが、実質賃金率を W、実質利子率を r として生産要素市場で $\dfrac{\partial f}{\partial L}=W$, $\dfrac{\partial f}{\partial L}=r$ が成り立てば、以下の**完全分配**が成立し、生産物 $f(L,K)$はすべて分配されつくします。

$$f(L,K)=\frac{\partial f}{\partial L}L+\frac{\partial f}{\partial K}K=WL+rK$$

* 一次同次の生産関数とは収穫一定というが、どれだけ分量を作っても生産要素の比率が一定のままでは、生産性は変わらないと言う意味で、以下が成り立ちま

す。

$$F(\alpha K, \alpha L) = \alpha F(K,L)$$

企業が突然、大きな投資を行って巨大になろうと1人1人の社員に分かれようと生産性は変化しないことになります。完全競争は一定の値段で好きなだけ売買できるという意味ですから、どれだけ生産しても、売り上げにも費用にも限界がありません。そのため投資理論では調整費用というものが導入されます。

考えよう ● 1次同次の生産関数 $F(K,L)$ を使って、生産量を α 倍すると、完全競争企業の利潤は比例して α 倍になることを確かめなさい。

考えよう B-7 ● $y=L^{3/4}K^{1/4}$ のとき、企業の利潤最大化問題から、上式の完全分配が成立することを確かめなさい。

E. 条件付き極値問題

これまで考えた通り、経済学では家計の「**予算制約下の効用最大化**」問題など、なんらかの制約条件のもとで、何らかの関数を最大化するという問題を考えることがほとんどです。先に企業の利潤最大化問題として、制約条件なしの最大・最小問題を考えましたが、効用最大化問題を考えると、もちろん効用は財が多ければ多いほど良いということで、何らかの制約がなければ最大値は求まりません。ところがもちろん予算には限りがあります。このように何らかの制約条件があって始めて、最大値を求めることに意味があることになります。

◆ 制約条件つきの最大化問題

最適値を求めるとき、関数をただ最大化するだけでは意味がなく、多くの場合、制約条件が必要となります。効用最大化問題ならば、消費財の量は多ければ多いほど良いに決まってますね。しかし予算制約式にしばられているので、最大化問題が意味をなすのです。このような場合、もともとの最適化すべき関数を f、制約条件を g とすると、**ラグランジェ乗数** λ というものを導入して、

新たな関数 $f+\lambda g$ を最大化

します。このラグランジェ乗数法の直観的な意味については、より上級の書物を参照してください。

制約条件 $0=g(x_1,x_2)$ と目的関数 $y=f(x_1,x_2)$ より、次のような3変数の**ラグランジュ関数** $L(x_1,x_2,\lambda)$ を構成しよう。

$$L(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)+\lambda g(x_1,x_2)$$

このような3変数の関数が $(a,\lambda)=(a_1,a_2,\lambda)$ で極値をとる**必要条件**は、

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_2}=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=g(x_1,x_2)=0 \qquad (3)$$

が成立します。このように条件付き極大値問題は、新しい関数 $L(x_1,x_2,\lambda)$ を考えることにより、(条件付きでない)極大値問題に帰着できます。[5]

★ **ラグランジェ乗数の例** [**予算制約下の効用最大化行動**]: 家計が予算制約式 $P_1x_1+P_2x_2=I$ のもとで効用 $u=x_1^ax_2^{1-a}$ を最大化する場合を考えましょう。必要条件は $g(x_1,x_2)=I-P_1x_1-P_2x_2=0$ と考えて、以下のラグランジェアン

$$L(x_1,x_2,\lambda)=x_1^ax_2^{1-a}+\lambda(I-(P_1x_1+P_2x_2))$$

の極値をとる**必要条件**は、

(1) $\frac{\partial L}{\partial x_1}=ax_1^{a-1}x_2^{1-a}-\lambda P_1=0,$

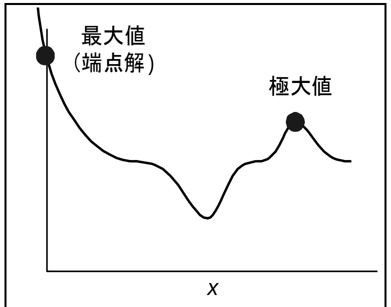
(2) $\frac{\partial L}{\partial x_2}=(1-a)x_1^ax_2^{-a}-\lambda P_2=0,$

(3) $\frac{\partial L}{\partial \lambda}=I-P_1x_1-P_2x_2=0$

となります。3つの未知数 (x_1,x_2,λ) に対応する3つの方程式が得られます。(1)(2)

5 ラグランジェ乗数の直観的な意味については、ベクトルの知識が必要です。

より未知数の一つλを消去して、$x_2=\frac{1-a}{a}\frac{P_1x_1}{P_2}$ =0 であり、(3)に代入して、均衡需要量 $x_1=aM/P_1$, $x_2=(1-a)M/P_2$ が求まります。なおここできれいな結果が出るのはコブ=ダグラス型効用関数という形の効用関数を使っていることに注意してください。



不等式($x\geq 0$)制約下での最大値

問題を一般的に解くと、x_1 の最適購入量は

$$x_1 = x_1(p_1, p_2, I)$$

となり、すべての価格と所得の関数となります。

考えよう B-8 ● $u=c_1^{2/4}c_2^{1/4}c_3^{1/4}$ のとき、効用最大化問題を定式化し、その問題を解きなさい。

◆ 包絡線定理

パラメーターa を含む最大化問題 max $f(x,a)$を考えよう。a の値に対し、最大化を実現する x を $x(a)$とし、$M(a) = f(x,x(a))$としたとき、

$$\frac{dM(a)}{da}=\frac{\partial f(x,a)}{\partial x}\frac{dx}{da}+\frac{\partial f(x,x(a))}{\partial a}=\frac{\partial f(x,x(a))}{\partial a} \qquad (4)$$

が成り立つ。つまり、パラメーターa の変化により、x を最適に調整したときの目的関数の変化は、x を調整しない場合の目的関数の変化に等しくなる。

なぜこの包絡線定理をここで持ち出したかと言えば、先に述べたラグランジェ乗数にうまく意味をつけることができるからである。たとえば消費者の効用最大化問題= max $f(x)$ s.t. $y-g(x)=0$ を考え、ラグランジェアン $L(y)=f(x)+\lambda(y-g(x))$では包絡線定理より $\frac{dL}{dy}=\frac{\partial L}{\partial y}=\lambda$ となる。つまりλは所得の限界効用、つまり所得を限界的に増加させた場合の効用の増分となる。

◆ 不等式制約

以上のような制約条件付き最大化問題は、予算制約式など等号の制約の問題であった。初歩の段階では、たいていがこのような等号制約でまにあうが、経済学では不等式制約が実際にも重要な場合が少なくない。たとえば価格は普通マイナスであってはおかしいし、生産要素の投入量もプラスでなければならない。

たとえば右図の場合、$x\geq 0$ では最大値は明らかに $x=0$ のときであるが、そのとき $f'(x)=0$ ではない。このように不等式制約がある場合、内点解のみならず**端点解**(Corner Solution)をいちいち考えなくてはならない。

ただし、このような手順ではなかなか解は見つからない。そこで凸計画と呼ばれるように、関数の形状に以下のような制約を課して分析する。

- **凹関数** (Concave Function)

  $f(ax_1+(1-a)x_2)>af(x_1)+(1-a)f(x_2)$
- **凸関数** (Convex Function)

  $f(ax_1+(1-a)x_2)<af(x_1)+(1-a)f(x_2)$

なお経済学で用いられる諸仮定は

(1) 財や資源の可分性(Divisibility)

(2) 目的関数・必要資源関数の連続性と微分可能性(Differentiability)

(3) 効用・生産技術の凸性(Convexity)

であるが、いずれも最適化問題が解きやすいような仮定となっている。

◆ クーン・タッカー条件

以上のように不等式制約がついた一般的な最適化問題のとき使われるのがクーン・タッカー条件である。

クーン・タッカー条件

x^*に対してあるλ^*が存在してラグランジェ関数を

$$L(x,\lambda)=f(x)+\lambda\{b-g(x)\}$$

としたとき

$$\frac{\partial L}{\partial x}=f'(x^*)-\lambda^* g'(x^*)=0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = b - g(x^*) \geq 0 \qquad (6)$$

$$\lambda^* \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda^* \left[b - g(x^*) \right] = 0 \qquad (7)$$

$$\lambda^* \geq 0 \qquad (8)$$

をみたすとき x^*はクーン･タッカー条件を満たす。

制約式を予算制約式と考えてみよう。(6)式の意味するところは、予算いっぱい使わなくてもいい[$b \geq g(x^*)$]ということを意味している。そしてそのとき(7)式より λ は 0 である。一方、予算いっぱい使う場合は[$b = g(x^*)$]λ は正であるが、[$\lambda(b - g(x^*))$]は 0 となる。

ただしクーン･タッカー条件は常に最適解を特徴づけているとは限らない。つまりクーン･タッカー条件を満たしていても最適解とは限らないのである。

たとえば**尖点**(cusp)があるケースや**退化**したケース(degenerate)である。つまり極めて一般的に言えばクーン･タッカー条件は最適解の必要条件ではないのである。

◆ 制約想定

ところがクーン･タッカー条件が最適解の必要条件となっていないケースを見ると制約条件が奇妙な関係にあることが分かる。それゆえ、制約条件に何らかの条件を課せば、クーン･タッカー条件が必要条件となる。以上のような何らかの制約を課した制約条件の制約を**制約想定**(Constraint Qualification)という。

さて制約想定には様々なものがあるが、

正規条件(Regularity Condition)
凸性とスレーター条件
鞍点条件(saddle point) $L(x, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda)$

などが挙げられます。

■コラム: 効用関数形と二つの仮説■

不確実性の経済学においては主体の危険回避の測度として、**絶対的危険回避**と**相対的危険回避**が使われている。確率的なショックの加わる経済では「投資」や「資産選択」はギャンブルだが、これに即して言えば**絶対的危険回避度**とは言わば「定額ギャンブル」であり、いくら資産を持っていても 1 万円ずつギャンブルをする場合であり、**相対的危険回避度**は「定率ギャンブル」であって、資産の1割ずつギャンブルをする場合であると考えれば分かりやすい。通常、資産がふえれば「定額ギャンブル」に対する抵抗感はうすれるが、定率ギャンブルに対しては「金持ケンカせず」で回避する気持ちは強くなると考えられる。

これをフォーマルに言うと

(1) 絶対的危険回避度 R_A は資産 W の減少関数であり、

(2) 相対的危険回避度 R_W は W の増加関数である

とまとめられる。

■相対的危険回避度一定の期待効用関数■

近年の確率的成長モデルでは、**相対的危険回避度一定の期待効用関数**(Constant Relative Risk Aversion: CRRA)

$$u(c_t)=\frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \qquad \sigma\neq 1 \qquad \text{(A)}$$
$$=\log c_t \qquad \sigma=1$$

が使われることが多い。この理由は消費の限界効用が $u'(c)=c^{-\sigma}$となり、対数をとれば線形になるなど扱いやすいからだが、もう一つの理由として、この効用関数が定常成長経路に収束することを保証するからである。なぜなら一般に相対的危険とは初期資産に比例する危険を意味し、その回避度が一定とは危険資産に対する需要が一定となる、つまり先の「定率ギャンブル」を行うことを意味する。それゆえ、最適成長モデルに即して言えば、ハロッド中立的な技術進歩のもと労働量増加のため総資産が増加しても、投資比率は一定となるため定常成長経路を保証するのである。また相対的危険回避度はアロー・ドブリュー経済のべき乗効用関数(Isoerastic Utility Function)に対応するが、それは相対的危険回避度が消費の限界効用の資産弾力性を表すからである。

■絶対的危険回避度一定の期待効用関数■

次に**絶対的危険回避度一定の期待効用関数**(Constant Absolute Risk Aversion: CARA)は、λ(>0)を絶対的危険回避度として

$$u(c_t)=1-\exp(-\lambda c_t),\ \lambda>0,\ R_A=\lambda \qquad \text{(B)}$$

と表される。ここで1が加えられている理由は、$e^0=1$であることから分かるように消費が0であっても効用は無限に小さくならない可能性を排除するためである。この効用関数の下では常に危険資産の需要が一定(定額ギャンブル)であるので、**予備的動機**(Precautionary Saving)などの貯蓄の研究に使われている。

この CARA 期待効用関数は異なる危険回避度を持つ経済主体を集計することができ、代表的経済主体な消費者の絶対的危険回避度は個別の経済主体の絶対的危険回避度の**調和平均**(Harmonic Mean)

$$\frac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots\ldots\frac{1}{x_n}}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{x_i})}$$

となる。調和平均は(加重)平均よりも一般に小さく、また上式から分かるようにたった一人の危険中立者がいても、そのたった一人の危険中立者がすべての危険を引き受けてしまうので、調和平均で集計された代表的経済主体は危険中立者となる。

なお二次効用関数の場合、効用の期待値は収入(資産)の期待値と、収入(資産)の標準偏差の関数となる。

$$u(c_t)=y-by^2, b>0, R_A=\frac{2b}{1-2by} \qquad \text{(C)}$$

II　ベクトルと行列

　ここではベクトル並びに行列について簡単にまとめることにしましょう。まずベクトルや行列はどのような分野で使われるでしょうか。

(a) 多変数の最適化問題では二階条件に**ヘッセ行列**というものが出てきます。
(b) 計量経済学ではたくさんのデータ間の関係を表すのですから、行列表記が一般的ですね。
(c) 経済動学では行列の固有値を使って、微分方程式や差分方程式を解きます。

　このように線形代数はさまざまな分野で使われますし、そこにはさまざまなテクニックがありますが、ここでは

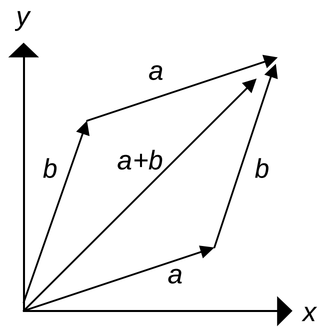
[A] 連立方程式をシステマティックに解くための**逆行列**と**行列式**
[B] 微分･差分方程式を解くための**固有値**

を最低限理解できるようにしましょう。
　なお例は断らない限り 2 行 2 列の行列及び 2 次元のベクトルを考え、幾何学的に図を書いて理解するよう説明していますが、もちろんより高次元ではこの図解法は使えないことに注意してください。

◆ ベクトルと行列

成分 x_1, x_2 をやはりそれぞれ実数値として、

- (x_1, x_2)というように横に配置したものを**行ベクトル**、
- 縦に配置したものを$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$を**列ベクトル**



といいます。成分の数を**次数**といいます。
* 英語ですから横書きと考えてください。
　図にあるように $a=(a_1, a_2)$、$b=(b_1, b_2)$とすると、ベクトルの和 $a+b=(a_1+b_1, a_2+b_2)$ と定義されます。
　行ベクトルが(身長，体重)を表すと考えると、2 人の身長、体重をそれぞれ足し合わせるわけですね。
　$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ をそれぞれ実数値として、$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ というように配置したものを 2 行 2 列の**行列**(Matrix)と呼びます(ベクトルは 1 行(列)のみの行列です)。
　もとは英語なので横書きで「**行**」とは横の並びを「**列**」とは縦の並びを表します。

　連立一次方程式 $y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2$, $y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2$ を行列表記すると、

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

と置いて、

$$Y=AX$$

と書けます。行列はもともと連立方程式を便利良く表すために発展したものですから､その概念は連立方程式に戻って考え直すと分かりやすくなります。ここではできる限り連立方程式に噛砕いて直感的な説明を試みましょう。

◆ 行列の演算

　行列とベクトルの演算を次のように定義します。

(1) 行列の**和**と**差**: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} \end{pmatrix}$

★ もちろん行･列数が一致していなければ和と差は定義できません。

(2) 行列の**積**: $AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

★ AB と BA は一致することもありますが､一般的には異なる行列です。[6]「かける順番」が重要で、「右からかける」あるいは「左からかける」と表します。

6　A が $m\times n$､B が $n\times m$ ならば､n と m の大小にかかわらず､AB も BA も定義できる。

(3) (2)と同様、行列とベクトルの積: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} \end{pmatrix}$

(4) 行列のスカラー倍: $b\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ba_{11} & ba_{12} \\ ba_{21} & ba_{22} \end{pmatrix}$

★ スカラーとは一つの数値で表されるただの数のことです。

◆ 行列式

2 行 2 列の行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の**行列式**(Determinant)、det A とは det $A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ と定義されます。

- 行列に 1 個の数字を与えるものが行列式です。
- 行列が**正則**であるかどうか(逆行列を持つかどうか)を決定する(Determine)式が行列式と考えるとよいかもしれません。

行列式の直観的な意味づけは 2 つあります。

(1) 2 行 2 列の行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ においては、二つの行ベクトル(a_{11},a_{12})・(a_{21},a_{22})が平面上のベクトルを表すものとした場合、行列式の値はその二つの**ベクトルが作る平行四辺形の面積**に等しくなります。

このため行ベクトルが 1 **次従属**である場合、行列式がゼロとなるのです。

(2) 連立一次方程式 $c_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2, c_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2$ を考えると、その解は $x_1=\dfrac{a_{22}c_2-a_{12}c_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, x_2=\dfrac{a_{11}c_2-a_{21}c_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$ となり、分母は共通で行列式 det A となります(**クラメルの公式**を使って、連立方程式を解くことができます)。

考えよう ● $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \end{pmatrix}$ のとき、行列式を求めなさい。

◆ 逆行列

通常の 1 次方程式 $ax=c$ は a の逆数を使って $x=a^{-1}c$ と計算します。この逆数を行列に拡大したのが逆行列です。

まず**単位行列** I を $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ として定義します。この時、2 行 2 列の行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の

逆行列 A^{-1} は $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ を満たす行列

として定義されます。このような逆行列が存在するための必要十分条件は、問題となる行列 A の行列式 det $A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ です。さらに、逆行列 A^{-1} が存在するとき、それは行列式 det A を用いてとして定義されます。

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

例:産業連関分析: 第 1 産業と第 2 産業からなる経済で、第 i 産業がその産出物 1 単位を生産するのに必要な第 j 産業の産出物を a_{ij},第 j 産業の粗産出物を x_i、それに対する最終需要量を c_i で表すと、次のような生産物市場の均衡式を得ます。

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+c_1=x_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+c_2=x_2$$

これらを行列表記すると、$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ となり、$AX=C$

最終需要の水準 $C=(c_1,c_2)$が与えられたときに、それらを実現するのに必要となる各産業の粗産出量 x_i を示す。即ち、投入係数行列 A=の逆行列 A^{-1} を、両辺に左側から掛けることにより、$AX=C$ は $A^{-1}AX=A^{-1}C$ となる。ただし det $A=(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{12}\neq 0$ である。このような投入係数行列 A の逆行列 A^{-1} は、**レオンティエフ**(Leontief) **逆行列**と呼ばれています。

◆ 行列式の性質

ここで行列式の性質を述べます。証明は与えませんが､2 行 2 列の例や､連立方程式体系､平行四辺形の面積を考えると、以下の性質が成り立つのは明らかです。

(1) 行列の一つの行(列)のすべての要素に同一の数α をかけて得られる行列の行列式は､もとの行列の行列式のα 倍である。
(2) 2 つの行(列)を入れ替えると､行列式の値は､符号だけが逆になる。
(3) 2 つの行(列)が等しいとき､行列式の値は 0 になる。
(4) 2 つの行(列)が互いに比例しているとき､行列式の値は 0 になる。
(5) 行列式の第 i 行(列)の成分が 2 数の和となっている行列式は､他の行をそのままにして､その行の成分を 2 組にわけてできる 2 つの行列式の和に等しい。
(6) 1 つの行(列)のα 倍を他の行に加えても､行列式の値は変わらない。

以上より

定理　A の行(列)ベクトルが 1 次従属ならば行列式の値は 0 である。
定理　行列式の値が 0 でないならば､A の行(列)ベクトルが 1 次独立である。

という重要な定理が成り立ちます。これは連立方程式に即して考えると、$0=x_1+2x_2$ と $0=2x_1+4x_2$ からなる連立方程式は､(1,2)と(2,4)という係数が比例しており､1 次従属なので解けないことを意味しています。なお行列が転置されても、行列式の値は変わりません。(det A=det A^{-1})

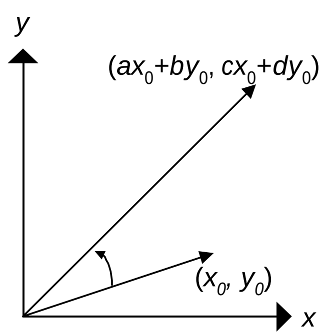
◆ 固有値

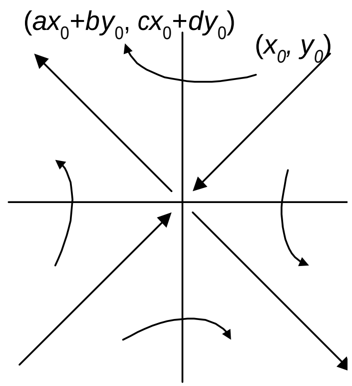
行列 A は $n\times n$､λ はスカラー､x は非ゼロ(少なくとも 1 つの要素がゼロでないという意味)の､n 要素のベクトルとする。

$$Ax=\lambda x$$

が成り立つとき、

- λ を A の**固有値**(Characteristic Value あるいは Eigenvalue)、
- x を A の**固有ベクトル**(Characteristic Vector あるいは Eigen Vector)





といいます。つまり、A により変換されても同じ方向を向いているベクトルを固有ベクトル、それによってλ 倍になるときの、λ を固有値と呼びます。[7]

◆ 固有値の直観的意味

図に表されるように、2 次元上の行列はベクトル(x_0, y_0)を**回転させて引き延ばす役割をする**のでしたね。$Ax=\lambda x$ が成立するとは、回転させても同じ方向ということです。ただ長さだけが異なっています。このように A を作用させても、方向が変化しないベクトルを固有ベクトル、変化した長さを固有値というわけです。

実は固有値は経済動学で重要です。

$$(X_{t+1}=)\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}(=AX_t)$$

として、固有値を求めると $X_{t+1}=AX_t=\lambda X_t$ つまり $x_{t+1}=\lambda x_t$、 $y_{t+1}=\lambda y_t$ が同時に成立して、変数が比例的に成長する定常成長経路が得られるのです。

◆ 固有値の具体的な求め方

固有値の具体的な求め方はむずかしくありません。$Ax=\lambda x$ を書きかえて$(A-\lambda I)x=0$ とします。これは x を未知数､$(A-\lambda I)$を係数とする､同次の(Homogeneous)連立一次方程式です。これが非ゼロの解 x をもつためには $\det(A-\lambda I)=0$ が必要かつ十分です。(後述)つまり $A-\lambda I$ は正則ではなく､逆行列を持たないことが必要かつ十分です。よって行列式は 0 であり､行列式を展開すればλ の n 次の多項式を

7　行列を作用させるとは、行列の固有ベクトルの方向に固有値倍する効果です。

えることができます。

det[$A-\lambda I$]を n 次の多項式に展開したものを**固有多項式**(Characteristic Polynomial)といいます。λ を未知数とする、n 次の代数方程式$\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_n=0$ となります。これを**固有方程式**、または**特性方程式**(Characteristic Equation)といい、その解が**固有値**です。

定理 行列 A の固有値 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\cdots\lambda_n$ が互いに相異なるとき、これに対応する固有ベクトル $x_1,x_2,\cdots x_n$ は一次独立である。

◆ 2 行 2 列の場合の固有値

2 行 2 列の場合の固有値を求めてみましょう。まず行列式は

$$\det(A-\lambda I)=\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{pmatrix}=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0 \quad (9)$$

となります。行列式を展開すればλ の 2 次の多項式(**固有**(**特性**)**方程式**)が得られます。

$$\lambda^2-\lambda(a_{11}+a_{22})+a_{11}a_{22}-a_{l2}a_{21}=0 \quad (10)$$

ここで$(a_{11}+a_{22})$は A の対角成分の和(Trace)であり tr(A)と表記し、また $a_{11}a_{22}-a_{l2}a_{21}$ は A の行列式 det(A)である。そこで固有値あるいは特性根は通常、以下のように書かれます。

$$\lambda_{1,2}=\frac{\mathrm{tr}(A)\pm\sqrt{\mathrm{tr}(A)^2-4\det A}}{2} \quad (11)$$

考えよう ● $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$ を展開し、固有方程式$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$ を導きなさい。また固有値を求めなさい。

◆ なぜ行列式が 0 なのか

ところで行列式が 0 であること(あるいは、$A-\lambda I$ は正則ではなく、逆行列を持たないこと)が、なぜ重要なのでしょうか。ここで$(A-\lambda I)x=0$ を連立方程式に書いてみると

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2=0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2=0\end{cases} \quad (12)$$

となる。ここで x_2 を消去すると、$(\lambda^2-\lambda(a_{11}+a_{22})+a_{11}a_{22}-a_{l2}a_{21})x_1=0$ により固有方程式が $x_1\neq 0$ の条件であることが簡単に確かめられます。

◆ 対角化

行列 A の相異なる固有値をλ_1,λ_2 とし、2 つの固有ベクトルを$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2\end{pmatrix}$とすると $Ax=\lambda x$ より、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2\end{pmatrix}$$

が成り立つ。これをまとめて書くと

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

であり、$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2\end{pmatrix}$を X と表記し、X^{-1} を左からかけて、

$$XAX^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

を得る。これを**ジョルダンの標準形**といいます。つまり固有ベクトルと固有値を使って計算が簡略化できる。たとえば

$$(XAX^{-1})\,(XAX^{-1})=XAX^{-1}XAX^{-1}=XA^2X^{-1}$$

となりますので

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\lambda_1)^2 & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^2 \end{pmatrix}$$

が成り立つので便利です。

定理　すべてが異なる固有値を持つ行列は対角化可能である。
定理　対称行列は直交行列で対角化可能である。

◆ 二次形式の最大･最小と固有値･半正値定符号行列

$A'=A$ のとき、$x'Ax$ を x の**二次形式**(Quadratic Form)という。すべての非ゼロのベクトル x について $x'Ax>0$ であるとき、$x'Ax$ は**正値定符号**(Positive Definite)の**二次形式**、A を**正値定符号の行列**という。また、すべての非ゼロのベクトル x について $x'Ax\geq 0$ であるとき、$x'Ax$ は**半正値定符号**(Positive Semi-Definite)**の二次形式**、A を**半正値定符号行列**という。(半)正値定符号行列の和は(半)正値定符号である。[8]

ここでミクロ経済学で習う、多変数関数の極大値の十分条件を考えてみる。

(1)　$f_i(x_0)=0$　　$i=1,\cdots\cdots n$

(2)　任意の $h=(h_1,\cdots\cdots h_n)\neq 0$ に対して $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_0)h_ih_j<0$

の(2)を行列を使って書き換えると、$(h_1,\cdots,h_n)\begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ となる。この 2 階偏微分の行列を**ヘッセ行列(ヘッシアン)**というが二次形式になっています。

---

[8] $A=A'$について
(i) 正値定符号であることと、そのすべての固有値が正であることとは同値。
(ii) 半正値定符号であることと、そのすべての固有値が非負であること同値。
また $n\times n$ で正値定符号で $A=A'$について
(i) 任意の $n\times m$ の行列 B について、$B'AB$ は半正値定符号である。
(ii) $\rho(B)=m$ のとき、またそのときに限って $B'AB$ は正値定符号である。

◆ さまざまな行列

以上のように行列の初歩をまとめたわけであるが、「なんとか」行列のあまりの多さに読者はうんざりされたと思う。そこで不完全であるが用語の意味を少しまとめておく。

行列式　det A (Determinant)

余因子　行列 A の i 行 j 列を除いて得られる行列の行列式に$(-1)^{i+j}$ をかけたものを a_{ij} の余因子といい、A_{ij} と書く。(Cofactor)

正方行列　行と列の数が同じ行列

転置行列　行と列を入れ替えた行列　^tA あるいは A'

対称行列　行と列を入れ替えても変わらない行列 $^tA=A$

単位行列　対角要素が 1 で非対角要素が 0 の行列 $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

逆行列　A^{-1} と表記し、$A^{-1}A=AA^{-1}=I$ を満たす正方行列

正則行列　逆行列を持つ行列

直交行列　$n\times n$ で $^tAA=I$ の行列 (Orthogonal Matrix)

対角行列　非対角要素が 0 の行列$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ diag[$a_1,a_2\cdots a_n$]とも表記する。

非特異行列　$n\times n$ 正方行列で階数が n の行列

上三角行列　対角線の下は 0 の行列 (Upper Triangular) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$

下三角行列　対角線の上は 0 の行列 (Lower Triangular) $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

半正値定符号行列　非ゼロのベクトル x について $x'Ax\geq 0$ となるような行列 A(Positive Semi-Definite)

- $x'Ax$ は半正値定符号の二次形式(Quadratic Form)
- 正値定符号(Positive Definite) $x'Ax>0$
- 負値定符号(Negative Definite) $x'Ax<0$
- 半負値定符号(Negative Semi-Definite) $x'Ax\leq 0$

ベキ等行列　$A=A'$、$A^2=A$ をみたす行列 (Idempotent)

ヤコビ行列　一階偏導関数の行列、あるいはその転置行列 (Jacobian)

ヘッセ行列　二階偏導関数の行列、あるいはその転置行列 (Hessian)

III 差分方程式と微分方程式

F. 動学システムの基礎

「動学(dynamics)」にはさまざまな定義がありますが、本稿ではさしあたり差分方程式や微分方程式によって表され、時間の経過とともに経済システムの変動を表すものと考えましょう。[9] ここでまず例示のために以下の簡単な線形 1 階差分方程式を考えることから出発しよう。[10]

$$x_{t+1}=ax_t+\varepsilon_t \qquad (1)$$

上式は、ある変数 x の $t+1$ 期の値 x_{t+1} は t 期の値 x_t にと撹乱項ε_tにより決定されることを意味しています。a が定数の場合、**線形**(Linear)の影響を現在から未来へ与えることとなり、a がたとえば 0.5 のような正の値であれば、毎期毎期半減するような一定の影響を現在から未来へ与えるわけですね。

しかし、これでは景気循環モデルで問題とするような循環的な動きを考察することができません。そこで 3 つの拡張法があります。

(a) 線形だが、現在のみならず過去の影響を加えて、以下のような 2 階差分方程式を考える。

$$x_{t+1}=bx_t+cx_{t-1}+\varepsilon_t \qquad (2)$$

このような 2 階差分方程式の場合、正と負の影響が複雑に関係して循環的な動きが生じてきます。たとえばパラメーターb が正で c が負の場合、複雑な動きを x_{t+1} に与えることが理解できる。[11]

(b) 変数を増加させ、連立方程式にする。

また一階差分方程式であっても、複数の未知数(たとえば日米の GDP がある以下のような連立方程式の場合、複雑な動きが生じます。

$$x_{t+1}=ax_t+by_t+\varepsilon_{1t} \qquad (3)$$
$$y_{t+1}=cx_t+dy_t+\varepsilon_{2t} \qquad (4)$$

こだしこの場合も、たとえば変数 y を消去すれば、x の高階差分方程式に帰着することがわかります。

より具体的には 1 期ずらして $x_{t+2}=ax_{t+1}+by_{t+1}+\varepsilon_{1t+1}$ に(4)式 $y_{t+1}=cx_t+dy_t+\varepsilon_{2t}$ を代入して、$x_{t+2}=ax_{t+1}+bcx_t+bdy_t+b\varepsilon_{2t}+\varepsilon_{1t+1}$ が得られる。(3)式の両辺にに$-d$ を掛けて、$-dx_{t+1}=-dax_t-dby_t-d\varepsilon_{1t}$ が得られますが、先の式に足しあわせて、$x_{t+2}=(a+d)x_{t+1}-(ad-bc)x_t-d\varepsilon_{1t}+b\varepsilon_{2t}+\varepsilon_{1t+1}$ が得られます。

(c) 線形のパラメーターを非線形に拡張する。

自然科学の分野でも盛んな**カオス**や**分岐**など、非線形動学や複雑系として盛んに分析されているのは、この方法です。このカオスが生じる体系として**ロジスティック関数**(Logistic Equation)の有名な例がある。ここで x_t は例えば GDP などの変数とし、μ をパラメーターとして、以下の簡単な式で x の動きがとらえられるとしよう。

---

9 周知のようにマクロ経済学は、世界大不況下の 1930 年代に経済全体の動きをとらえる学問として成立した。GDP や失業率、インフレ率や利子率など、マクロの数字、つまり集計したり平均したりした経済諸変数の相互依存関係や、どの変数が先行し、どの変数が遅行して動くか(先行遅行関係)を、主として連立方程式(IS-LM 分析などの静学分析)や連立差分方程式(動学分析)で表したものだ。たとえば GDP は消費や投資を構成要素として足し合わせたものだが、その消費は GDP の大きな影響で決定される。GDP が消費を決めるのか、消費が GDP を決めるのか、文章では混乱してしまうが、数式で書けば簡単な一次方程式(45 度線分析)だ。さらに変数の依存関係に時間ラグを付ければ動学モデルになる。このようにマクロ経済学では、数式を使っていく。ただ数学モデルと一口に言っても、変数間の相互依存関係の想定には違いがあり、その違いが学派の違いをもたらしている。

10 差分方程式については高橋(1961)、Sargent (1979), Farmer (1999) 等を参照されたい。

11 このように**マクロ・ダイナミックス**とはケインズ以降のマクロ理論の発展を受けて、マクロ変数の動きを線型差分方程式によって捉えたものである。いわゆる Samuelson (1939)の**乗数−加速度モデル**と呼ばれるモデルなど、基本的には IS-LM 分析を複雑にしたもので、いまなお官庁や民間研究所のもとでケインジアンのマクロ計量モデルを使って行われる経済予測の基礎となっている。

$$x_{t+1}=\mu\, x_t(1-x_t) \qquad (5)$$

この式では t 期の x が決ると、上の式に代入して t+1 期の x は簡単に求まるので、x がどのように変動するのかは逐次的に明らかになります。[12]

ショック=伝達メカニズム

以上の差分方程式内部で循環を考察する見方は、差分方程式体系で表される経済システム内部それ自体で循環が継続することを想定していた。これにに対し、現在のマクロ経済学において中心的役割を果たしているのは

- 外部からのショックに加えて
- 差分方程式による自律的な変動による伝達メカニズム

を考察するショック=伝達メカニズムによるとらえ方である。外生的なショック(インパルスとも呼ばれる)が差分方程式体系によって表される経済システム内部で働く伝達メカニズムにより増幅される、と考える。不況や好況にはそれぞれ出発点の理由と増幅するメカニズムの二つがあると考えるわけである。[13]

◆ **動学的な最適化問題**

なお差分方程式はマクロ・ダイナミックスのように天下り的に仮定される場合よりも、動学的な最適化問題の解として導出される場合のほうが多い。最適成長モデルなど、動学的な最適化手法により分析されるモデルでは、最適性の条件は通常、

[A] **オイラー方程式**と呼ばれる**差分方程式**(問題が連続型の場合は微分方程式)と、
[B] **横断性条件**など**端点条件**で示される。つまり

[a] 今日の消費 c_t と明日の消費 c_{t+1} はどのような関係でなくてはならないか、という変化率を示す差分方程式だけでは充分でなく
[b] 水準を考える端点条件が必要なのである。

たとえば Hall (1978)の著名なランダムウォーク消費仮説では、解の条件は E_tc_{t+1} を c_{t+1} の期待値として $E_tc_{t+1}=c_t$ で表される最も単純なオイラー方程式です。(現在の消費と将来の消費はまんべんなく配分するという原則から得られます。)しかしこれでは消費が月額 10 万円であれば、来月の予想消費も 10 万円と言うように、現在と将来の変化を示しているに過ぎません。今月が月額50 万円であれば、来月の予想消費も50 万円という関係も差分方程式を満たすわけである。そこで端点条件が必要なのである。

以下ではマクロ動学モデルの初歩として、差分方程式と微分方程式の初歩を解説する。

G. 差分方程式

さて以下のような線形一階差分方程式(定差・階差方程式 ((Linear First-Order) Difference Equation))を説明しよう。

$$y_{t+1}=ay_t+bx_t \qquad (1)$$

---

12 このような非線形動学を扱った景気循環モデルには、大きく分けて二つの流れがある。一つは**世代重複モデル**を使った Gradmont (1985)に代表されるもの、そしてもう一つは Benhabib and Nishimura (1985)に代表される**多部門最適成長モデル**を使ったものである。これらとは別に近年、注目を浴びつつあるものとして、Diamond and Furdenburg (1989)らのサーチ理論が挙げられ、計量的な試みも盛んに成りつつある。

13 ここで最初に 80 年代盛んに研究されたリアル・ビジネス・サイクル(RBC)モデルの考える景気循環とはどのようなものかを、ロビンソン・クルーソーの寓話に即して考察してみよう。RBC モデルにおいては「外からのショック」として、技術的ショックを考えることが多い。これはクルーソーの畑に到来する「台風」に例えられよう。台風はクルーソーにとってどうしようもない外生的ショックであり、もちろんケインズ的な有効需要管理政策で解決できる問題ではない。この台風のときにクルーソーが外に出て、畑をいつも通りに耕すのは最適な行動だろうか。もちろんそうではなく、最適な行動は台風が通り過ぎるのを待って、そこから耕し直すことである。このような不利な状況ではタネをまいても芽が出ないかもしれないし、きれいに畑を整備しても無駄である。そこで労働供給も投資も減ってしまうのである。さて台風が来たため、いつもは 1 日 8 時間は働くのに、1 日まるまる働けなかったとしよう。そのときクルーソーは次の日に 16 時間働いて埋合わせるだろうか。もちろんクルーソーは 1 日にせいぜい 2 時間ぐらい働くのを増やして、なだらかに埋合わせるだろう。つまり**ショック**を台風とすれば、働く時間をなだらかに調整することが**伝達メカニズム**となるのである。

ここでy_tは経済主体が決定する**内生変数**(Endogenous Variable)である。x_tはy_tに影響を与える**外生変数**であり、y_t は自分の過去の歴史と外生変数によって影響されることになる。

◆ 差分方程式の種類

[a] ここで外生変数x_tが時間tに依存しない定数であると、この差分方程式は**自律系(自励系** Autonomous)である。

[b] x_t=0 で y_t が y_{t-1} のみに依存する場合、この差分方程式は**同次系(斉次系** Homogeneous)である。[14] $y_t=ay_{t-1}+bx_{t-1}$ のような式は非同次であり、bx_{t-1} は**非同次項**と呼ばれる。

[c] 定数係数の場合、この差分方程式は**線形**(Linear)である。($y_t=ay_{t-1}$ は線形・同次・自律。)

◆ 差分方程式の解き方

[1] 差分方程式の**解(一般解・特解)**とは、それを満足している関数を言う。差分方程式は代数を求める代数方程式ではなく、関数を求める**関数方程式**である

[2] **初期条件**で与えられる関数値を**初期値**と言う。1 階の方程式の場合は一つ必要だが、2 階の場合は続けて 2 つ必要である。一般に一般解に含まれる任意定数の数だけ初期値が必要である。

[3] 2 階差分方程式の**境界条件**(Boundary Condition)として、離れた 2 点を境界値として与える場合、必ずしも**解の一意性の条件**は保証されない。

★ 東京･横浜で与えれば、一意に決まるが、東京大阪で与えれば決まらない。

以上のは主として線形の方程式を明示的に解く場合を考えているが、経済学ではアリジゴクのように 1 点に収束するか、離れてしまうかかどうか「だいたいのふるまい」を考察しています。

[4] 通常、**均衡点**あるいは停留点(Fixed Point)は、$\bar{y}=f(\bar{y})$ を満たす点であり、$y_t=y_{t-1}=\bar{y}$ を代入して求められる。

[5] **安定性**は後述する

(1) 均衡点の回りをテイラー展開により、線形化し、対角化する方法。

(2) OLG モデルのように図解する方法、

のどちらか、あるいは両方によって分析される。

◆ 固定係数を持った線形システム

さて一階の差分方程式の解は c を定数とし、λ を以下で説明する固有値とし、$y_t=c\lambda^t$、二階の場合は $y_t=c_1\lambda_1{}^t+c_2\lambda_2{}^t$ であることが知られている。たとえば $y_{t+1}=3y_t$ という差分方程式を考えよう。

c を何らかの定数として

$$y_t=3c$$
$$y_{t+1}=9c$$
$$y_{t+2}=27c$$

と考えれば、1 期ごとに 3 倍になるわけだから、$y_t=c\cdot 3^t$ という形になることが分かるだろう。t=0 のときの初期値 y_0 が 1 ならば c=1 である。

それでは行列を使って一般的に説明しよう。通常、経済動学はシステムつまり、幾つかの連立方程式によって記述される。

$$\begin{cases} x_{t+1}=a_{11}x_t+a_{12}y_t & (1a) \\ y_{t+1}=a_{21}x_t+a_{22}y_t & (1b) \end{cases}$$

これを行列表記して

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

となる。ここで行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ において、$Ax=\lambda x$ が成立つとき、λ を A の**固有値** (Characteristic Value あるいは Eigenvalue)、x を A の**固有ベクトル** (Characteristic Vector あるいは Eigen Vector)といった。[15] (A は $n\times n$、λ はスカラー、x は非ゼロ(少なくとも 1 つの要素がゼロでないという意味)の n 要素のベクトルとする。)

---

14 両辺を一定倍しても、同じ方程式を満たすからである。

15 正方行列をベクトルに掛けるということは、ベクトルを回転させ何倍かするということを意味する。行列式の意味については西村(1982, p. 55～)を参照。

$Ax=\lambda x$ であるので

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = c\lambda \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

が成り立つのが分かるだろう。固有値λは2つあるので以下の形になる。

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = c_1\lambda_1^{\ t} + c_2\lambda_2^{\ t}$$

なお定数項が 0 である)**同次**の(Homogeneous)場合を考えたが、以下では非同次方程式であっても、非同次項を取り除いて、まず同次部分の方程式から固有値を求める。

◆ 差分方程式の解

固有値が分かれば差分方程式の解は求まる。

(1) 線形の一階差分方程式の場合､初期値を特定しない**一般解**は c を任意の定数とし、λ を固有値として $y_t=c\lambda^t$ のように求められ､その後**初期値**を代入して c を特定化した**特解**を求める。
(2) 線形二階差分方程式の場合､解は $y_t=c_1\lambda_1^{\ t}+c_2\lambda_2^{\ t}$($\lambda_1\neq\lambda_2$ の場合)あるいは $y_t=(c_1+c_2t)\,\lambda_1^{\ t}$($\lambda_1=\lambda_2$ の場合)のようになることが知られている。

一般的な場合

(a) 一般的なより高次の場合も同様である。$\det[A-\lambda I]$を n 次の多項式に展開した**固有多項式**は､やはりλ を未知数とする､n 次の方程式である**固有方程式** $\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_n=0$ となり､その解が**固有値**である。
(b) また二階以上の差分方程式､例えば $x_{t+1}=a+bx_t+cx_{t-1}$ でも以下のように容易に連立方程式に変換される。

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_{t-1} \end{pmatrix}$$

考えよう ● 上記の $x_{t+1}=a+bx_t+cx_{t-1}$ で固有値を求め、一般解を求めなさい。

さて線形の高階の離散的システムには以下のような特徴がある。[16]

(1) もし A が対称行列なら ⇒ 解は実数。
(2) もしすべての解の絶対値が 1 以下なら⇒ あらゆる初期条件に対して**安定**。
(3) もしすべての解の絶対値が 1 以上なら⇒ あらゆる初期条件に対して**不安定**。
(4) 少なくとも絶対値 1 以上の解が一つ存在するなら ⇒ ほとんどの場合の初期条件に対して不安定。
(5) 2 階差分方程式の場合、絶対値 1 以上の解が一つ、絶対値 1 以下の解が一つならば ⇒ **鞍点(あんてん)的安定**､すなわち､その軌跡の上にあるすべての初期点が究極的には定常均衡に収束するような唯一の軌跡が存在する。

ここで解が 1 以上であるかが重要となる理由は $x_{t+1}=ax_t$ のような差分方程式を考えれば明らかなように、1 以上なら x はどんどん大きくなり発散してしまうからである。

H. 微分方程式と位相図

◆ 差分方程式から微分方程式へ

さて以下の**離散型**の差分方程式の

$$x_{t+1}-x_t=z_{t+1} \qquad (1)$$

時間のきざみを無限小にすることによって､**連続型**の微分方程式を以下のように導出できます｡(1)式の $t+1$ を $t+\Delta t$ に置換えて極限を取ってみましょう。

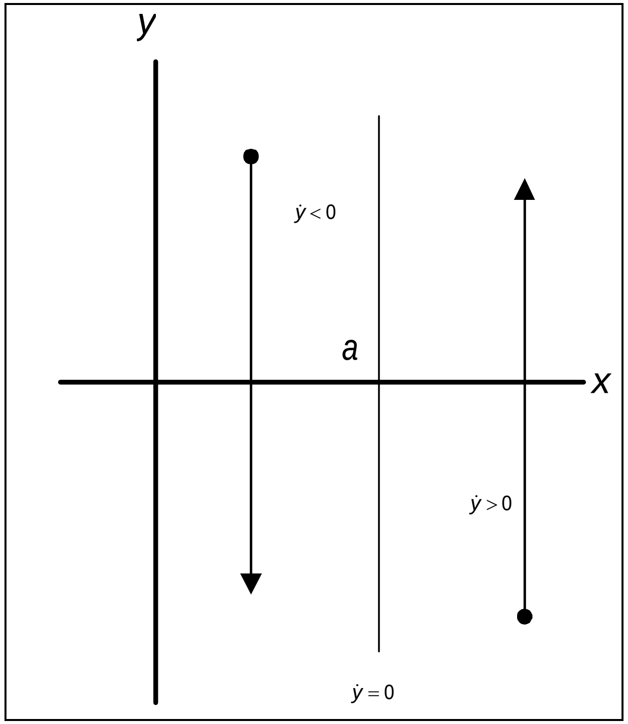
$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(x_{t+\Delta t}-x_t\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\left(z_{t+\Delta t}\right) \Rightarrow \dot{x}_t=z_t \qquad (2)$$

★ 頭に点がある表記は時間に対する微分、つまり変化量を表し、2 点ある場合は 2 階微分を表します

◆ 微分方程式の例

微分方程式も差分方程式とほぼ同様に解ける。たとえば以下の 2 階微分方程式

16 以下は差分方程式の場合(Farmer(1999, p.29)参照)であり、微分方程式についてはバーロ=サライマーーテイン邦訳(II 巻 328 ページ等を参照されたい。



を考えよう。

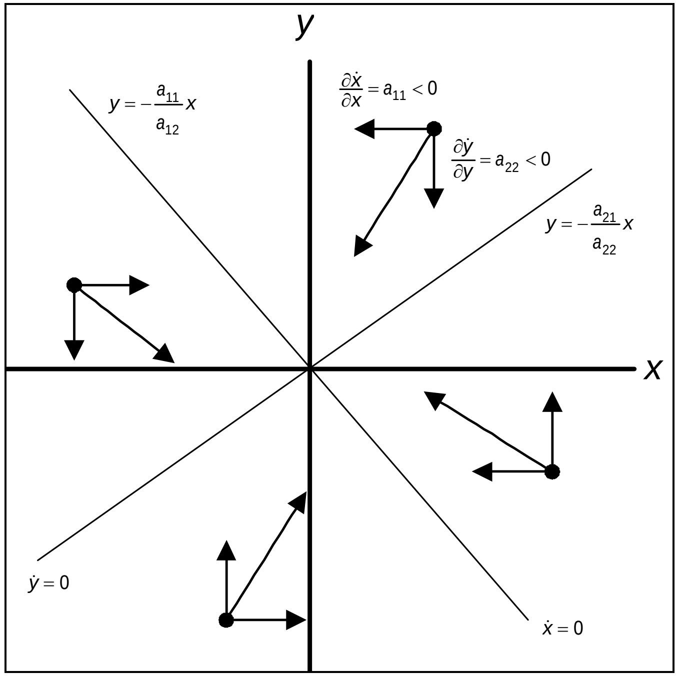
$$\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+6y=0 \qquad (3)$$

ここで $e^{\lambda t}$ という形の解が存在することを仮定すると、以下の特性方程式

$$\lambda^2-5\lambda+6=0 \qquad (4)$$

が得られる。その根はλ=2,3 であるから、微分方程式は二つの解 e^{2t}, e^{3t} をもち一般解は $y_t=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}$ である。つまり

[a] 固有値をλ として、差分方程式では $c\lambda^t$ が解となるが、線形の微分方程式では $ce^{\lambda t}$ という形の解となる。



[b] 差分方程式では固有値λ の絶対値が 1 より大きいかどうかが問題となるが、微分方程式では 0 より大きいかどうかが問題となる。

なぜ微分方程式の解が $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ を使って、表されるのでしょうか。

$y_{t+1}=(1+\lambda)y_t$ という差分方程式の解は $c(1+\lambda)^t$ となるが、$t=nh$ とおいて、t の刻みを n で割って小さくしてゆく。新しい差分方程式 $y_{n+1}=(1+\lambda h)y_n$ の解は $(1+\lambda h)^n$ となるが、$n= h/t= (\lambda h)/(\lambda t)$ であるので、このとき $\lim_{n\to\infty}(1+\lambda h)^n=\lim_{\lambda h\to\infty}(1+\lambda h)^{\lambda t/\lambda h}=e^{\lambda t}$ となります。

◆ 連立微分方程式と固有値

以下のような連立微分方程式の場合、

$$\begin{cases}\dot{x}=ax+by & (a)\\ \dot{y}=cx+dy & (b)\end{cases}$$

差分方程式と同様に、以下の行列式により固有値を求める。

$$\det(A\text{-}\lambda I) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \quad (5)$$

◆ 位相図

位相図(Phase Diagram)は動学体系の安定性の概要を理解するためによく使われる方法である。

ここで簡単に説明しよう。まず$\dot{y} = x - a$の位相図を書こう。

- $x>a$ のとき$\dot{y} = x - a > 0$ で y は増加してゆくので上向きの矢印が書かれている。
- $x=a$ のとき$\dot{y} = x - a = 0$ で y は変化しない。
- $x<a$ のとき$\dot{y} = x - a < 0$ で y は減少してゆくので下向きの矢印が書かれている。

次に以下の連立線形微分方程式を考える。なお上記の位相図は a_{ii} はすべて負であるとして書かれている。

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y & (1a) \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y & (1b) \end{cases}$$

(1a)を書直すと

$$y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x + \frac{1}{a_{12}}\dot{x} \qquad (2)$$

であり、(1b)を書直すと

$$y = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x + \frac{1}{a_{22}}\dot{y} \qquad (3)$$

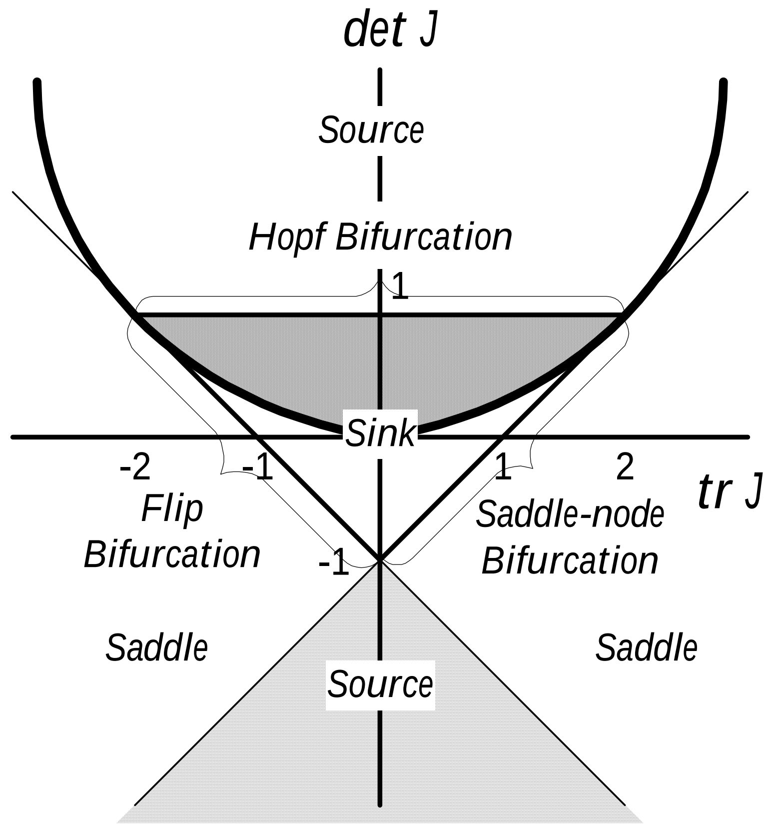
である。さて位相図を書く。

(1) $\dot{x} = 0$、$\dot{y} = 0$として**補助線**を引き 4 つの領域に分ける。

(2) それぞれの領域での x, y の変動方向を以下の手順で矢印によって示す。

(2a) <u>x 軸に沿った動きを横の矢印で考える。</u>

つまりここで(1a)より$\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial x}=a_{11}$ であるから、a_{11} が負であれば、$\dot{x} = 0$ あるいは$y = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}x$の右側、つまり x 軸に沿った動きでは$\dot{x}$は負となる。



(2a) <u>y 軸に沿った動きを縦の矢印で考える。</u>

$\dot{y}$の動きは(1b)より$\dfrac{\partial \dot{y}}{\partial y}=a_{22}$ であるから、a_{22} が負であれば、$\dot{y} = 0$の上側では$\dot{y}$は負となる。

(3) 特性根が実数･複素数に留意して**軌道**を書く。

以上の位相図は主として非線形の場合に多く使われているが、これはあくまで大体の動きを知るためであって、図を書く前に計算によってさまざまな特性を知らなくてはならない。

参考文献

以下の 3 つは標準的な経済数学の教科書である。

[6] 三土修平 (1996) 『初歩からの経済数学 第 2 版』 日本評論社.
[7] A. C. チャン著 大住栄治他訳 (1995) 『現代経済学の数学基礎 上･下』 シーエーピー出版.
[8] 西村和雄 (1982) 『経済数学早わかり』 日本評論社.

他にも有用なものとして

[9] 田島一郎 (1981) 『解析入門』 岩波全書.
[10] 稲田献一 (1965) 『経済数学の手ほどき』 日経文庫.
[11] 神谷和也･浦井憲 (1996) 『経済学のための数学入門』 東京大学出版会.

差分方程式については

[12] 高橋健人 (1961) 『差分方程式』 培風館.
[13] D. G. ルーエンバーガー (1985) 『動的システム入門』 ホルト･サンダース
[14] Azariadis, Costas, (1993) *Intertemporal Macroeconomics*, Blackwell.
[15] Farmer, Roger E. A., (1999) *The Macroeconomics of Self-Fulfilling Prophecies second edition*, MIT Press.
[16] 西村和雄･福田慎一編 (2004) 『非線形均衡動学』 東京大学出版会.

などがある。