第 2 章 最適成長モデルと時間を通じた決定 (修正版)

それはメリー・ゴーラウンドによく似ている。それは定まった場所を定まった速度で巡回しているだけのことなのだ。どこにも行かないし、降りることも乗りかえることもできない。誰をも抜かないし、誰にも抜かれない。しかしそれでも我々はそんな回転木馬の上で仮想の敵に向けて熾烈なデッドヒートをくりひろげているように見える。

村上春樹『回転木馬のデッド・ヒート』講談社文庫

本章では基本的な 1 セクター最適成長モデルと動学的最適化問題の基礎を解説する。この 1 セクター最適成長モデルは Romer (1986)に始る内生的成長理論や Kydland and Prescott (1982)から始る RBC モデルの基礎となるものであり、このモデルは現在ではベンチマーク・モデルとして必ず学ばなくてはならない。そこで幾多のマクロ経済学の教科書はかなり詳しい 1 セクター最適成長モデルの解説から始っているが、それらはかなりテクニカルなので、まずここで「食わずぎらい」を増やしてしまう。そこで本章では最初に 1 セクター最適成長モデルをロビンソン・クルーソーの寓話に即して、なるべく数式を使わず展望し、その後、数学的な分析を動学的な最適化の手法と共に解説する。C 節以降はかなり数式が頻出するので、とりあえず飛ばして読んでもらってもかまわない。

A. クルーソーの選択と 3 つのヴェール

生来質素なロビンソンではあるが、かれとてもいろいろな欲望を満たさなければならないのであり、それゆえに道具や家具をつくり、山羊をならし、漁猟をするなど、さまざまな有用な労働をしなければならない・・・・・必要そのものにせまられて、かれは自分の時間をさまざまな仕事に的確に配分するようになる。

マルクス

孤島に漂着したロビンソン・クルーソーを主人公とした小説はよく知られているが、1 セクター最適成長モデルはこのクルーソーの選択を考えると分かりやすい。クルーソーが(a) 一人で、(b) 小麦だけを作る経済を考えてみよう。このような想定は 1 セクターモデルと呼ばれるが、この理由は経済に小麦を作るセクターしかないからである。そしてこの小麦は食べることができるから消費財であるが、来年の種蒔きに使えるから資本財ともなる。つまりこの小麦は消費財としても資本財としても使える単一の合成財である。

さてクルーソーの選択問題は実はここでは以下の 2 つしかない。

(I) 働くか働かないか、つまり小麦を植えるか植えないかの労働市場の問題と

(II) 小麦を食べてしまう(消費)か、タネをまくために取っておくかおかないかの生産物市場における投資-貯蓄の決定問題

なぜならクルーソーは一人でいるので財を交換する人もいないし、貨幣も存在しても意味がないからである。

ここで簡単化のためクルーソーは決った時間だけ働くと考えて労働市場の選択を省略すると、次の様な**代表的経済主体(Representative Agent)**の通時的効用最大化問題を考えることになる。

$$\max_{c_t} U = u(c_0) + \rho u(c_1) + \rho^2 u(c_2) + \cdots = \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(c_t) \tag{1}$$

ここで $u(c_t)$は t 期の消費 c_t から得られる効用であり、ρ は将来の効用を低く見積る**割引要素 (Discount Factor)**と呼ばれるものである。多くの場合、クルーソーの目的関数は以上のように各期の効用を単純にたし合せたものと仮定される。

さて次にクルーソーの制約条件を考えなければならない。通常の消費者の最適化問題では市場経済を前提として価格や所得を外から与えられて動かせないものとして**予算制約式**を考えるが、ここではクルーソーは一人なので、収穫した生産物をどう配分するかが直接の制約となるので、以下の制約式を考える。

$$k_{t+1}=f(k_t)-c_t \tag{2}$$

ここで k は資本財、c は消費財、f は一次同次の生産関数であり、$f(k)$は生産量である。このモデルでは資本財も消費財も小麦と考えているのだから、去年に残しておいた小麦 k_t を使って、タネまきをすると $f(k_t)$だけ収穫が得られる。その収穫から、食べてしまった消費 c_t を引くと、来年のタネとして k_{t+1} が残るのである。

ここで資本財は小麦だと想定したことで、タネ蒔きをすれば使いきってしまうことになる。これは 100%の**資本減耗**を意味することに注意されたい。通常は減価償却率をδ として、機械のような資本財はわずかだけ擦り減ると仮定され、制約式は以下のようになる。

$$k_{t+1}-k_t=f(k_t)-c_t-\delta k_t \tag{2′}$$

(* 資本を果物の木と考えると、資本の耐久性と減価償却がより理解しやすい。)

さらに最初に小麦がなければ、畑で小麦を作ることは出来ないから、資本財の初期値$\bar{k}_0$が必要とされる。

$$k_0=\bar{k}_0 \tag{3}$$

このような 2 つの式の制約のもとで、最初の目的関数を最大化するのが、もっとも簡単な最適成長モデルの問題設定であり、このモデルは完全競争的な生産物市場・資本市場・労働市場のもとで多数の家計と多数の企業からなる分権的な市場均衡と一致するのである。

なぜロビンソン・クルーソーでよいのか

さて、なぜロビンソン・クルーソーの選択が分権的な市場均衡を表しているのだろうか。この点は数学的に F 節で証明されるが、ここではまず簡単に直観的な意味を説明しておこう。

第一の理由として、この設定では企業はヴェールとしてしか存在しないことである。[1]一次同次の生産関数と完全競争の仮定の下では、生産物は完全に労働者と資本家の取り分に分配される。(オイラーの分配法則)ところが、ここではクルーソーがひとりしかいないので、労働者と資本家を兼ねる個人企業の想定をとっている。そこで労働所得も資本所得もクルーソーがひとりで得るので、直接、生産物全体が各期の消費-投資配分を制約するのである。

第二の理由として、クルーソーは一人で住んでいるので、かえって市場は失敗しないからという点があげられる。一人しかいないクルーソーは、情報が不完全や不完備なため誰かが嘘をついたり、怠けたりすることに悩む必要はない。さらに誰かが孤島に攻めてきたとしても一人で自分を守ら

1 ここではヴェールと言う比喩を「実体のないもの」という意味で使っている。しかしヴェールのため内部は見えない、という意味の比喩もしばしば使われるので注意されたい。

なければならないので、公共財としての「国防」の費用負担の問題すら生じないのである。

つまり市場が失敗する状況は、いずれも複数の人間がいて始めて意味がある。そしてクルーソーの寓話は複数の人間がいて市場が失敗しなければ、完全競争市場としてとらえられる状況もありうることを示しているにすぎない。そこで第 7 章で後述する新ケインジアン経済学が多数の人間の「協調の失敗」を重視することと対照的であることが分かる。

ヴェールとしての企業と生産要素市場

以上の二つの理由をさらに詳しく考えてみよう。企業がヴェールであるということは、実は生産要素市場である労働市場も資本市場もヴェールであることである。この市場がヴェールであるという想定は、生産要素価格である実質賃金と実質利子率(収益率)が伸縮的に動いて最適な資源配分を達成することを意味する。この点をさまざまな留意点と共にもう少し説明してみよう。

(A) ヴェールとしての労働市場　クルーソーは一人なので、自由に働くか休むかを決められる。ところが現在の経済では自由に働くか休むかを決められるだろうか。そこでクルーソーの物語に出てくる「フライデー」と呼ばれる現地人を登場させてみよう。フライデーを雇って働かすわけだから、ここでクルーソーは「企業家」となり、フライデーは「労働者」と解釈することができる。フライデーはクルーソーの命令で働くわけだから、自分が好きなだけ働くわけにはいかない。

このようにケインズ経済学においては、「**古典派の第二公準**」を否定(最適労働供給の否定)するが、クルーソーの寓話は実質賃金の調整作用により、最適な労働需要と供給が達成されると考える。さらに、**組織としての企業**の内部構造や複雑な契約ならびに取引形態を考察していないわけである。

(B) ヴェールとしての資本市場　現代では「**所有と経営の分離**」からさまざまな問題が生じるが、このクルーソーの寓話ではすべて実質利子率の調整作用により、円滑に解決されると想定している。つまりクルーソーが小麦を食べずに取っておけば、それは投資であり貯蓄でもあるので最初から問題は存在しない。ところがケインズ経済学においては通常、投資する企業家と貯蓄する資本家は異なる経済主体であり、貯蓄と投資が「事前」的には必ずしも一致しないという想定をとっている。そこでクルーソーとフライデーともう一人、登場人物が必要となってくる。これはケインズの三階級論でいう金利生活者あるいは資本家である。資本家はタネ小麦を銀行にあずけ、そしてクルーソーが銀行からこれを借り、そしてフライデーを使ってタネをまく。そして収穫時にお礼(利子)をつけて返すというようなメカニズムがはたして円滑に進むのかが、問題となってくる。

ヴェールとしての取引・交換

さらに生産物市場でもクルーソーはひとりしかいないので、このモデルではもともと取引や交換というものが存在しない。新古典派の体系では**貨幣**はヴェールであり、一般均衡体系ではすべての経済主体がすべての市場に参加して、すべての情報をもとに一気に均衡価格・数量を決める。しかしこのクルーソーの寓話では、市場の交換も完全に価格の調整作用により、最適な資源配分が達成されることが分かる。

なぜロビンソン・クルーソーでよいのか: ヴェールとしての政府

さらに付加えるなら、この寓話では政府は出てこない。単純な新古典派の分析では政府の政策もヴェールであることを示していると言えるかもしれない。

以上のような説明では企業にもそして生産要素市場にも実体がないし、さまざまな不完全性がないのだから、極めて非現実的と考えられるかもしれない。フライデーは働きたいと思っても、クルーソーは雇ってくれないかもしれない(非自発的失業)し、クルーソーはフライデーがまじめに働かない(モラル・ハザード)ことに悩むかもしれない。さらに資本家や貯蓄供給者である家計はクルーソーがタネ小麦を借りてくれないので困ってしまうかもしれない。

つまりクルーソーの寓話は (a) 貨幣に代表される交換と取引構造、(b) 企業に代表される労働市場・資本市場などの生産要素の投入、そして(c) 政府などの公共セクターの三点をヴェールとして考察しているわけである。このような想定が非現実的であるというのはたやすい。しかし現実の経済変動の理解に何が一番重要なのだろうか。交換プロセスが最も重要であり、貨幣の存在が本質的である、という立場もあるだろう。巨大な企業のもとで労働市場が不完全であるからとか、貯蓄を決める家計と投資を決める企業が分離しているからといった意見は、もともとのケインズ経済学の有効需要原理に近い。さらに新古典派の立場であっても、政府がかえって攪乱要因になっていると考える意見もある。

このように意見の分れている現状では経済のすべてが理想的な状況にあると考える最適成長理論は、そこからの距離をはかるベンチ・マークとして逆に重要となってくる。事実、市場の失敗や政府の失敗はすべて最適成長理論を標準として、そこからどれだけ乖離するかを研究されているのである。

B. 動学的最適化問題とは何か: 逐次決定問題

さて最適成長モデルの概要は以上の通り、簡単なものだが、これを厳密に考察するためには、動学的最適化問題を学ばなくてはならない。ところが学部レベルのミクロ経済学で学んだ家計の効用最大化問題や、企業の利潤最大化問題の多くは 1 時点の制約条件を所与として、与えられた関数を最大化する<u>静学的</u>最適化問題(Static Optimization)であった。例えば家計の効用最大化問題では、リンゴとミカンの組合せを与えられた所得と価格をもとに<u>同時に決定</u>する例が中心であったが、もっと重要な選択と考えられる老後に備えたり、家を買ったりするための「貯蓄」をするという分析は厳密には行われなかった。このような**時間を通じた最適化問題**は企業にとっても同様に重要であり、「投資」をして設備を拡張すること、つまり現在の「利潤」を犠牲にして将来のより大きな利潤を得ようとする行動の分析が必要となってくる。

貯蓄や投資決定の問題はマクロ経済学の学部教科書では若年期と老年期、あるいは現在と将来の 2 期間モデルで扱われているが、もちろん問題は本来、このように単純ではない。多期間どころか無限の彼方まで計画期間を考えなければならないか、あるいはいつ死ぬか分からないので、毎日生涯の消費計画を考え直さなければならない。

このように時間を通じて、毎日計画を順々に立直す性質がマクロ経済学の動学最適化問題では重要となるのであり、このような**逐次決定**を考察する必要が生じる。言換えればミカンとリンゴの購入量を<u>同時に決める</u>のではなく、ミカンを買った<u>あとに</u>、リンゴをどのくらい購入するのかを考

えることが必要となってくる。[2]

具体的な 3 つの方法

さて動学的最適化問題の解を求める手法として

(1) **変分法(Calculus of Variations)**、

(2) ポントリャーギンの**最大値原理(MP: Maximum Principle)**か

(3) Bellman の**動的計画法(DP: Dynamic Programming)**

の 3 つがあり、いずれかの手法を用いて解くことになる。いずれの手法も基本的な考え方は同じではあるが、実際の適用には一長一短があるとされる。ところがこれらの方法については、通常、マクロ経済学の教科書ではあまり解説されていない。一方、動学的最適化を扱った経済数学の教科書は詳しくかつ厳密であるので要点をつかみにくく、また背理法など使って説明されているのでなぜこのような式が出てくるのかが分かりにくい。[3]そこで本章ではこれらの直観的意味をある程度大胆に説明することにする。

状態変数・操作変数と遷移式

さて動学的最適化問題に対して数学的に鍵となる概念は以下で説明する「**状態変数(State Variable)**」の導入である。[4]この状態変数を消費者の効用最大化問題に対応して考えると、通常の静学的効用最大化問題では、外生的な所得を前提として予算制約式を考えるわけだが、貯蓄を導入すると、資産の増減により各期の予算制約式は次々と変化する。この変化を表すものが**遷移式(Transitional Equations)**と呼ばれる式である。

先の例に即すと、リンゴを買ってからミカンを買うのだから、予算制約式は刻々と変化していく。この場合、財布の中に残っているお金が予算制約となるが、この「財布の中に残っているお金」が**状態変数**と呼ばれるものであり、ミカンやリンゴの購買量は**操作変数(Control Variables)**である。正確に定義すると<u>**状態変数**とはある時点では**操作変数**の影響を受けないが、次の時点に移るときに影響を与える変数であり、状態変数の異時点間の動きを表すものが**遷移式**である</u>。[5]

ここで状態変数を y と表し、操作変数を x で表すと、遷移式は

$$y_{t+1}-y_t=f_t(y_t,x_t)\cdots\cdot\text{離散時間}\qquad \frac{dy_t}{dt}=\dot{y}_t=f_t(y_t,x_t)\cdots\cdot\text{連続時間} \tag{1}$$

と一般に表される。

ただしこのような定義だけでは分かりにくいので、1 セクター最適成長理論の解説の前に経済学で使われる状態変数と遷移方程式の例を挙げておこう。

(1) <u>消費者の多期間に渡る効用最大化問題</u>・・・・t 時点の資産 A_t は過去の選択によってすでに

---

2 このミカンとリンゴの例に即して言えば、消費者がリンゴの価格を正確に予想していたり、リンゴの先物市場や条件付き債券市場があれば結果は静学的な問題と同様になる。これがいわゆるアロー・ドブリュー経済である。

3 例えば Barro and Sara-I-Martin (1995)では操作変数の最適な計画の下での値からのわずかな乖離による目的関数の値の変化が 0 となる(Perturbation)ことを使って説明している。

4 この例から分かるように、動学的最適化問題のテクニックは時間を通じた問題に応用されるとだけとは限らず、例えば都心からの距離に応じて地価が下がるような事例の分析にも使われる。

5 通常、外生変数と時間を加えて、4 種類の変数を扱う。

決定されているため t 時点の最大化問題では所与とされる状態変数であるが、$t+1$ 時点では操作変数である貯蓄 $s_t(=A_t+d_t-c_t)$の影響を受けて増減する。[6]

$$A_{t+1} = (A_t + d_t - c_t)(1 + r_t), \qquad \dot{A}_t = r_t A_t + d_t - c_t \tag{2}$$

であり、ここで c_t は t 期の消費、A は資産、d は配当や給与、r は利子率である。[7]

(2) 企業の利潤最大化問題・・・・資本設備量 k_t は t 時点では一定である状態変数であるが、$t+1$ 時点では操作変数である投資 I_t の影響を受けて増減する。

$$k_{t+1} - k_t = I_t - \delta k_t \qquad \frac{dk_t}{dt} = \dot{k}_t = I_t - \delta k_t$$

ここでδは減価償却率であり、多くの場合、時間を通じて一定とされる。

C. 1 セクター最適成長モデルの問題設定

さて 1 セクター最適成長モデルの問題設定を先にクルーソーの寓話に即して説明したが、今度は標準的な**連続時間**(Continuous)の**最適成長モデル**(Optimal Growth Model)をみてみよう。ここでは通常の教科書で前提とされる解の条件をまずまとめておき、その後で直観的な意味を説明する。

最適成長モデルは通常、

(1) あたかも社会主義経済のように政府や代表的経済主体が中央集権経済計画問題を解くと考え、

(2) 次に多数の家計と企業からなる分権的な市場均衡問題を同様に考える。

(3) そして(1)と(2)の同値性を証明する

といったプロセスで論文が書かれている。

そこでまず中央集権計画問題の設定から見てみよう。ここで簡単化のため、やはり労働市場の選択を捨象すると、次の様な**代表的経済主体**(Representative Agent)の通時的効用最大化問題を考えることになる。

$$\max \int_{t=0}^{\infty} u(c_t)\exp\{-\rho t\}dt \qquad \text{(目的関数:A-1)}$$

$$subject\ to \quad \dot{k}_t = f(k_t) - \mu k_t - c_t \qquad \text{(資本蓄積の動学方程式: A-2)}$$

$$k_0 = \bar{k}_0 \qquad \text{(初期値: A-3)}$$

なおここで f は一次同次な生産関数($\equiv F(K/L,1)$)、k_t は t 期の一人当たりの資本ストック($k \equiv K/L$)、$\mu \equiv n$(人口成長率)+δ(減価償却率)である。

さてここで A 節の問題設定と異なる点は、時間の刻みを無限小にしているので、

(a) 目的関数に積分が使われている。

(b) 資本蓄積の動学方程式に瞬時の k の増分 $\dot{k}\left[\equiv \frac{dk}{dt}\right]$ が使われており、これが先の状態変数となる。

---

6 消費者の効用最大化問題では、すべての期間の収入とすべての期間の支出が等しいことが予算制約式になり、有限期間の場合には明示的に求められる。しかし計画期間が無限視野の場合、予算制約式を明示的に簡単に表せるとは限らない。

7 これらの遷移式はどの時点で配当などを貰うかによって変化することに注意されたい。

という二点である。さらに細かい点として以下の 2 点も挙げられる。

(c) 主観的割引率(Subjective Discount Rate)は指数が使われているが、これは微分したときに便利なためである。

(d) また減価償却率ばかりでなく人口成長を考慮するため、人口成長率 n も考慮されている。

問題の設定と解の条件

通常、この問題の設定や経済学的意味それ自体はクルーソーの寓話に即して説明したように、さほど難しいものではないが、解き方やその解の条件を初学者が理解するのは難しい。しかし標準的な解法を最大値原理に基いてまず説明しておこう。

始めに、以下のような**ハミルトン関数**(Hamiltonian Function)H を導入する。

$$H_t = \underbrace{u(c_t)\exp(-\rho t)}_{\text{Utility from Consumption}} + \underbrace{\lambda_t}_{\text{Inputed Price}} \underbrace{(f(k_t) - c_t - \mu k_t)}_{\dot{k}:\text{Investment}} \qquad \text{(A-4)}$$

ここでλ_tは動学方程式(A-2)に付随する**ラグランジェ乗数**(**Lagrangean Multiprier**)であるが、資本 k_t が限界的に上昇したとき、目的関数 U にはどのくらい上昇するかを表している。(特に**帰属価格**(**Imputed Price**)と呼ばれる。)[8]

最大値原理によれば、上記の動学的最適化問題に最適解がもし存在するならば、その**必要条件**は、(A-2)と(A-3)と共にハミルトン関数をめぐる以下の 3 式で与えられる。

c_t:	$\dfrac{\partial H_t}{\partial c_t} = u'(c_t)\exp(-\rho t) - \lambda_t = 0$	(消費水準の決定: A-5)
k_t:	$\dot{\lambda}_t = -\dfrac{\partial H_t}{\partial k_t} = -\lambda_t(f'(k_t) - (\mu + \rho))$	(動学方程式: A-6)
k_∞:	$\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_t k_t = 0$	(横断性条件: A-7)

通常のようにすべての関数が c と k に関しての凹関数ならば、以上は必要十分条件である。さらに(A-6)式に(A-5)式を代入して整理すると、次のような**ケインズ-ラムゼイ・ルール**(**Keynes-Ramsey Rule** あるいは Euler Equation)と呼ばれる式に変形できる。

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma_t}\{f'(k_t) - (\mu + \rho)\} \qquad \text{(ケインズ・ラムゼイ・ルール: A-8)}$$

ここで$\sigma_t = -c_t u''(c_t)/u'(c_t)$は限界効用の弾力性と呼ばれ、$\sigma_t > 0$ である。[9]

つまりまず<u>最大値原理</u>と言うものを使って、<u>ハミルトン関数</u>というものを定義し、そして<u>無限期間</u>に渡って問題を解かなくてはならない。ここで下線を引いて表した言葉は、たぶん初学者にとって始めて出会うものであろう。さらに解の条件を見ると、さらに複雑である。そこで以下のような疑問が生じたり、ミクロ経済学で扱われる問題との違いに気付くかもしれない。

(A) なぜ 1 時点での制約式が扱われ、期間全体の制約式は前提とされないのか。

---

8 消費の効用と投資の帰属価値を足し合わせたハミルトン関数(A-4)は、<u>効用の単位で測った 1 人当たり国民純生産</u>と見なすことができる。

9 一般によく使われるべき乗効用関数 $u(c_t)=\{(c_t^{1-\sigma}-1)/(1-\sigma)\}$(あるいは相対的危険回避度が一定の期待効用関数)を仮定すれば、σ は時間に依存せず一定となる。

(B) なぜ解の条件 A-6 に微分方程式が出てくるのか。しかもラグランジェ乗数あるいは共役変数がそのまま出てくるのか。

(C) なぜ初期値が必要とされ、そして無限期間の問題では横断性条件というものが必要とされるのか。

さてこれらの条件はどのような直観的意味があるのか、どのようにして導出されるのか、あるいは下線を引いた言葉はどのような意味を持つのだろうか?

D. 有限期間・離散時間最大化問題による最適成長モデル

以上のような疑問に直観的に答えるため、無限期間・連続時間の最適成長モデルを有限期間・離散時間のモデルに修正することによってまず数学的に説明しよう。この理由は有限期間・離散時間最大化問題は実は「巨大な」静学的 Kuhn-Tucker 問題にすぎないからであり、この静学的問題を検討することにより、自然な直観的意味が理解されるからである。

両端条件付き有限期間・離散時間モデル: 最終期の状態変数が所与のケース

まず目的関数は離散時間の 0 期から T 期までの消費から得られる効用の割引現在価値の総和を最大化する問題としよう。ロビンソン・クルーソーの寓話に即していえば無人島から救出される時期が分かっているか、ハルマゲドンの時期が分かっているという意味になる。

$$\max_{c_t} U = u(c_0) + \rho u(c_1) + \rho^2 u(c_2) + \cdots + \rho^T u(c_T) = \sum_{t=0}^{T} \rho^t u(c_t) \qquad \text{(目的関数:B-1)}$$

なお、変数の定義は先の通りである。

次に制約条件を考えるがここでは状態変数 k の両端が与えられているとする。[10]

$$\textit{subject to} \quad k_{t+1} - k_t = f(k_t) - c_t \quad t=1,2,3,4,\cdots T \qquad \text{(遷移式:B-2)}$$

$$k_0 = \bar{k}_0 \qquad \text{(初期条件:B-3)}$$

$$k_{T+1} = \bar{k}_{T+1} \qquad \text{(終端条件:B-4)}$$

ここで以下の巨大なラグランジェアンを考えるが、

$$L = \sum_{t=0}^{T} \{\rho^t u(c_t) + \lambda_t (f(k_t) - c_t - k_{t+1} + k_t)\} = \sum_{t=0}^{T} H_t \qquad \text{(B-5)}$$

このラグランジェアンは離散型のハミルトニアンに対応する関数 $H_t \equiv \{\rho^t u(c_t) + \lambda_t (f(k_t) - c_t - k_{t+1} + k_t)\}$ の総和となっている。ただしここでは、あえてそのような関数を導入せず、以下のように書下して、考察してみよう。

$$\begin{aligned} L = {} & u(c_0) + \lambda_0 (f(k_0) - c_0 - k_1 + \overline{k_0}) + \rho u(c_1) + \lambda_1 (f(k_1) - c_1 - k_2 + k_1) + \rho^2 u(c_2) + \cdots \\ & \cdots \rho^t u(c_t) + \lambda_t (f(k_t) - c_t - k_{t+1} + k_t) + \rho^{t+1} u(c_{t+1}) + \lambda_{t+1} (f(k_{t+1}) - c_{t+1} - k_{t+2} + k_{t+1}) + \cdots \\ & \cdots + \rho^{T-1} u(c_{T-1}) + \lambda_{T-1} (f(k_{T-1}) - c_{T-1} - k_T + k_{T-1}) + \rho^T u(c_T) + \lambda_T (f(k_T) - c_T - \underbrace{\overline{k_{t+1}}}_{Given} + k_T) \end{aligned} \qquad \text{(B-6)}$$

---

10 もともと変分法は 1 本のひもで最大の面積を囲むには、どのようにすればよいか、という問題に即して説明されることが多い。この場合ひもの両端はもちろん与えられている。

となる。

さて以上の問題は通常の静学的最大化問題にすぎず、ここでの t 期におけるクルーソーの選択は消費 c_t と投資 k_{t+1} を選ぶことである。

消費水準の決定

まず消費 c_t について偏微分すると t=0 から t=T までの最適条件が t+1 個、以下のように求められる。

c_t:
$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \rho^t u'(c_t) - \lambda_t = 0, \quad t=0,\cdots T \tag{B-7}$$

この条件式の意味は簡単であり、c_t は上のラグランジェアンに 2 回しか出てこない。またこれは割引要素は異なるが、A-5 式と同様である。経済学的な意味を述べると、この 1 財モデルでは小麦を食べてしまう(消費の限界効用)価値とタネをまく収益(投資の帰属価値:λ_t)とが等しい場合が最適であるからである。

投資水準の決定

次に投資水準 k_{t+1} を考えてみよう。これは少し複雑であり、k_{t+1} はラグランジェアンに 3 回出てくる。t=1 から T 期まで

k_{t+1}:
$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1} + \lambda_{t+1} f'(k_{t+1}) = 0, \quad t=0,\cdots T-1 \tag{B-8}$$

であり、これを書直すと

$$\lambda_{t+1} - \lambda_t = -\lambda_{t+1} f'(k_{t+1}), \quad t=0,\cdots T-1 \tag{B-9}$$

となる。ここで最終期である T+1 期の資本ストック k_{T+1} は所与であるので、T–1 期までの k_t に関して偏微分することに注意されたい。あるいは同じことであるが 1 期ずらして表すと

$$\lambda_t - \lambda_{t-1} = -\lambda_t f'(k_t), \quad t=1,\cdots T \tag{B-10}$$

となる。(B-9)の左辺は負の符号を付けたハミルトニアンを状態変数で偏微分したものになる。

さて上式は離散型であるが、時間のきざみを無限小にすることによって、連続型の資本蓄積の動学方程式を以下のように導出できる。(B-9)式の t+1 を $t+\Delta t$ に置換えて極限を取ると

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\lambda_{t+\Delta t} - \lambda_t\right) = -\lim_{\Delta t \to 0}\left(\lambda_{t+\Delta t} f'(k_{t+\Delta t})\right) \Rightarrow \dot{\lambda}_t = -\lambda_t f'(k_t) = \left(-\frac{\partial H_t}{\partial k_t}\right) \tag{B-11}$$

となる。これは連続型の最大値原理で解の条件とされた A-6 式である。

共役変数の変化

さてこの共役変数の変化に制約が加わるとは、どういうことだろうか。動学的最適化問題では、各期の予算制約式を次々に変化させてゆくことが要点であることは前にも述べた。ここでの問題に即して言えば、<u>資本蓄積を次々と行って各期の資源制約式を変化させてゆくのだから、この変化のさせ方にも制約を加えて最適な方法を見つけなければならない。</u>

ここでミクロ経済学で説明されるラグランジェ乗数の経済学的意味を思い出してみよう。所得 y を所与とし、効用を u とすると、通常の包絡線定理より $\lambda=\partial u/\partial y$ となり、λ は所得の限界効用と解釈される。[11]ここで k_{t+1} の増加は t 期の所得(あるいは消費可能性)を低下させる効用で測った費用

11　このことは通常の大学院レベルのミクロ経済学の教科書には必ず説明されている。

λ_t があるが、t+1 期の消費可能性を増加させる便益$(1+f'(k_{t+1}))\lambda_{t+1}$ がある。そこでこの費用と便益が一致するように資源制約式を変化させなければならないのである。

なお上記の 2 つの式、(B-7)(B-8)より、λ_t を消去して、離散型のケインズ・ラムゼイ・ルールが導出される。

$$u'(c_t)=\rho u'(c_{t+1})(f'(k_{t+1})+1) \qquad \text{(ケインズ・ラムゼイ・ルール: B-12)}$$

以上の最大値原理の説明は 1 セクター最適成長モデルに即したものであり、もちろん一般的なケースに応用できるが、ここではこれ以上は説明しない。

終端制約条件と横断性条件: 最終期の状態変数が与えられないケース

さて以上の問題は最終期の状態変数が所与とされていた問題であった。ところがそうでない終端制約がない場合(**Free End**)、**横断性条件**という不可思議なものが与えられている。実は具体的な意味あいはさほど難しくない。ここでの最大化問題は通時的に消費から得られる効用を最大化することであり、クルーソーが故郷に帰る最後の日に資本あるいは小麦を残しておいても全く意味がない。そこで無限の未来における 1 人当たりの資本の帰属現在価値をゼロ、つまりタネはゼロか(k=0)たくさんタネがあるのでもはや価値がないか(λ=0)、どちらかにすること、つまりλk=0 を求めている。

そこでこれを数学的に導出するために、導入されるのはクーン・タッカー条件でお馴染みの非負制約であるが、動学的最適化問題では**状態変数の非負制約**となる。さて目的関数は先と同様に

$$\max \sum_{t=0}^{T} \rho^t u(c_t) \tag{B-13}$$

であるが、制約条件には先の $k_{T+1}=\overline{k_{T+1}}$ と最終期日の資本を外生的に与える代りに $k_t \geq 0$ という非負制約を導入しよう。これはクーン・タッカー条件を使って横断性条件を導出するためである。

$$\textit{subject to} \quad I_t = k_{t+1} - k_t = f(k_t) - c_t \quad t=1,2,3,4,\cdots T \tag{B-14}$$

$$k_t \geq 0 \quad t=1,2,3,4,\cdots T+1 \tag{B-15}$$

$$k_0 = \bar{k}_0 \tag{B-16}$$

ここでγ を(B-15)に付随するラグランジェ乗数として、やはり以下のラグランジェアン L を考える。

$$L = \sum_{t=0}^{T} \{\rho^t u(c_t) + \lambda_t (f(k_t) - c_t - k_{t+1} + k_t) + \gamma_{t+1} k_{t+1}\} \tag{B-17}$$

これを書下すと

$$\begin{aligned} L &= u(c_0) + \lambda_0(f(k_0) - c_0 - k_1 + k_0) + \gamma_1 k_1 + \rho u(c_1) + \lambda_1(f(k_1) - c_1 - k_2 + k_1) + \gamma_2 k_2 + \rho^2 u(c_2) + \cdots \\ &\cdots \rho^t u(c_t) + \lambda_t(f(k_t) - c_t - k_{t+1} + k_t) + \gamma_{t+1} k_{t+1} + \rho^{t+1} u(c_{t+1}) + \lambda_{t+1}(f(k_{t+1}) - c_{t+1} - k_{t+2} + k_{t+1}) + \gamma_{t+2} k_{t+2} + \cdots \\ &\cdots + \rho^{T-1} u(c_{T-1}) + \lambda_{T-1}(f(k_{T-1}) - c_{T-1} - k_T + k_{T-1}) + \gamma_T k_T + \rho^T u(c_T) + \lambda_T(f(k_T) - c_T - k_{T+1} + k_T) + \gamma_{T+1} k_{T+1} \end{aligned} \tag{B-18}$$

となり、$\gamma_t k_t$ のような項が加わっていることが分かる。

横断性条件

さてこの最大化問題を解くと、消費水準の決定は先と同様であるが、投資水準 k_{t+1} を考えてみよう。これは少し複雑であり、k_{t+1} はラグランジェアンに 4 度出てくる。クーン・タッカー条件から

■より一般的な最大値原理■

さてこれまで最適成長モデルに即して最大値原理を説明したが、実は直観的理解を優先するため、いくつかの重要な注意点を無視してきた。ここでそれらをまとめておこう。

(1) 第一に各期の不等式制約条件、あるいはいわゆる以下のように表される環境制約式などを無視して説明してきた。ここで操作変数を x_t、状態変数を y_t として

$g_t\,(y_t, x_t) \geq 0$ (不等式制約条件あるいは環境制約式)

の制約が加わったとしても、これらは通常のクーン・タッカー条件と同様に扱えば良い。

(2) 不等式制約条件(1)に付随するラグランジェ乗数をμ として、先に記した共役変数の差分方程式

$$\lambda_t - \lambda_{t-1} = -\left(\frac{\partial H_t{}^*(y_t, \lambda_t)}{\partial y_t} + \mu_t{}^* \frac{\partial g_t{}^*}{\partial y_t}\right) \qquad \textbf{(Forward Looking Variable)}$$

(価格は横断性条件より決るので将来に規定された変数)

と共に状態変数の差分方程式

$$y_{t+1} - y_t = -\left(\frac{\partial H_t{}^*(y_t, \lambda_t)}{\partial \lambda_t} + \mu_t{}^* \frac{\partial g^*}{\partial \lambda_t}\right) \qquad \textbf{(Backward Looking Variable)}$$

(資本は初期値により順々に決るので過去に規定された変数)

を合せて**ハミルトニアン・ダイナミックス**という。先のモデルでは環境制約式を無視しており、μ_t 以降がないので遷移式と同じとなるので省略してある。

(3) 通常、記号は $H(t,y,\cdots)$のように t を中にいれて書かれるが、ここでは H_t のように表記した。t も実は他と同等の変数であるので実はあまりこの表記は望ましくないが、そうしないと、あまりにも繁雑となり、直観的理解を優先した。

t=0 から T–1 期までは

$$k_{t+1}: \qquad \frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1} + \lambda_{t+1} f'(k_{t+1}) + \gamma_{t+1} = 0, \quad t=0,\cdots T \tag{B-19}$$

となる。しかし、$f(0)=0$ とすると $k=0$ では生産ができない。そこで $k>0$ であるが、クーン・タッカー問題における**相補性スラック条件**(Complementary Slackness Condition)により k が正ならγ は 0 なので、T 期までの k_{t+1} についての最適条件は簡略化でき、以下のように先の問題と同様に同じ条件が得られる。[12]

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1} + \lambda_{t+1} f'(k_{t+1}) = 0, \quad t=0,\cdots T \tag{B-20}$$

しかし最終期日の資本 k_{T+1} についての最適条件は上とは異なった結果となる。

$$k_{T+1}: \qquad \frac{\partial L}{\partial k_{T+1}} = -\lambda_T + \gamma_{T+1} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_{T+1} = \lambda_T \tag{B-21}$$

$$\gamma_{T+1}: \qquad k_{T+1} \geq 0, \tag{B-22}$$

上 2 式のクーン・タッカー条件より

$$\lambda_T k_{T+1} = 0, \tag{B-23}$$

となる。そこで計画期間の T を $T \to \infty$とすることによって横断性条件が求められる。

---

12 最大値原理の必要条件・十分条件についてはここでは詳述しないが、クーン・タッカー条件を使うことから問題の複雑さの一端が理解されるだろう。

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_t k_{t+1}=0$$ (離散時間の**横断性条件**: B-24)

なお連続時間の場合やはり t+1 を $t+\Delta t$ に置換えて極限を取ると

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_t k_t=0$$ (連続時間の**横断性条件**: B-25)

となる。

E. 移行過程

さてこれまでクルーソーの寓話により直観的な最適計画の説明と、クーン・タッカー条件による数学的な説明を行った。しかし「成長」モデルであるのに、どのように成長するのかはあまり具体的に述べられなかった。そこで通常良く使われる**位相図**(**Phase Diagram**)と呼ばれるもの(図 1)を使って

(1) どのような状態に経済は落ち着いていくのかという定常均衡と

(2) そのような定常均衡点に経済は近づいていくのかという安定性

という 2 つの問題をこれより検討する。

定常均衡点・修正黄金律と 2 つの曲線

まずこのモデルにおける定常均衡では、定義上、消費も資本ストックもいつも同じでなければならない。このような想定は少し不自然に感じられるかもしれないが、この点は内生的成長理論により修正が試みられているので第 10 章を参照されたい。そこで $\dot{k}_t=0$ と $\dot{c}_t=0$ を C 節の(A-4)から(A-8)式に代入することによって求められる。

(1) **定常消費水準** 最適成長モデルではどのように消費と投資を分割するかを決定するわけだが、投資が大きすぎると消費は減ってしまうし、投資が少なすぎると、全体のパイが減ってしまうので、やはり消費が少なくなってしまう。そこで図 1 の山なりの曲線は(A-2)式で $\dot{k}_t=0$ を満たす k_t と c_t の組み合せであり、$c_t=f(k_t)-\mu k_t$ を表している。

$$c^*=f(k^*)-\mu k^*$$ (定常消費: E-1)

なお、ここで $\dot{k}_t=0$ とは一人当たりの資本ストック水準がいつも一定に保たれていると言う意味であり、投資がゼロであるということではない。資本減耗や人口成長により投資は必要とされている。

(2) **定常資本ストック水準と修正黄金率** 図 1 の中の垂直線はケインズ・ラムゼイ・ルール(A-8)式で $\dot{c}_t=0$ を満たす k_t と c_t の組み合せであり、一人あたりの資本ストック水準がどのような条件で決定されるかを表している。

$$f'(k^*)=\mu+\rho$$ (定常資本ストック: E-2)

(E-2)式は**修正黄金律**(**Modified Golden Rule**)と呼ばれるもので、**黄金律**と呼ばれ、一人あたりの消費水準が最大となる図上の B 点と区別されなければならない。[13]修正黄金律では

13 黄金律では資本の限界生産性 $f'(k)$がμ に等しいが、これは(E-1)を k で微分すると確かめられる。

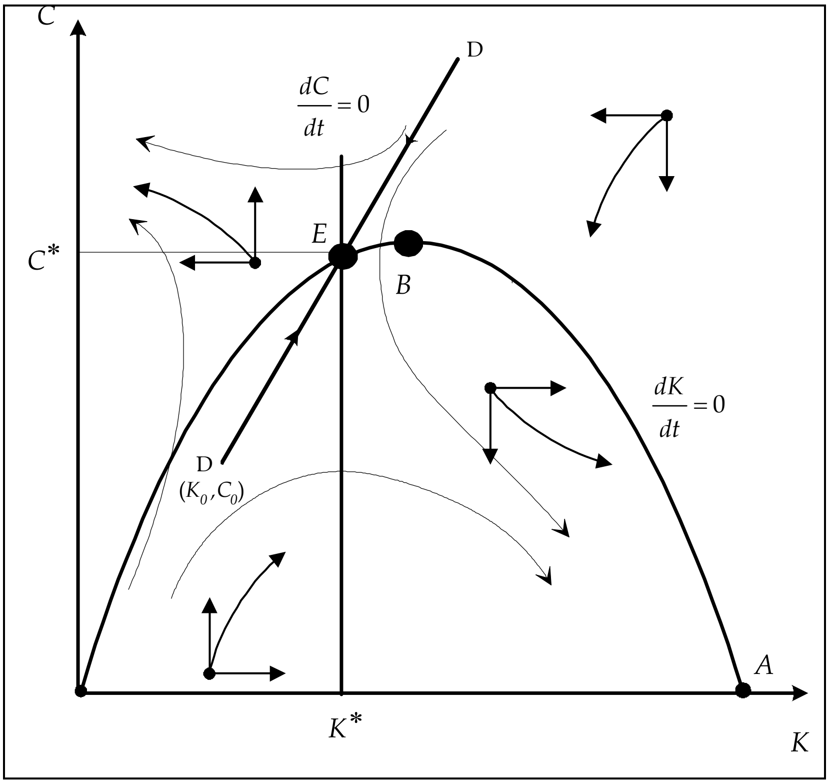


図 1: 定常均衡と位相図

資本の限界生産性はより大きく、自然成長率μ と時間割引率ρ の和μ+ρ に等しい。[14]

(3) **定常均衡** ここで均衡値は原点と A 点、E 点であるが、原点と A 点は消費が 0 となって明らかに最適ではない。そこで、すべての最適性条件を満たすのは E 点のみである。そこで(1)と(2)の交点 E がこの動学体系の**定常均衡**(k^*,c^*)であり、それは E-1 と E-2 の両式を満たしている。

位相図と安定性

さて以下の A-2 と A-8 は非線形の 2 変数連立微分方程式である。このような連立微分方程式の安定性を図解するために一般に位相図という手法が用いられる。ただし 2 変数線形連立微分方程式は正確に図解できるが、非線形の場合の位相図は厳密であるかどうかは明らかでないことに注意されたい。

$$\dot{k}_t = f(k_t) - \mu k_t - c_t \qquad \text{(資本蓄積の動学方程式: A-2)}$$
$$\dot{c}_t = c_t \frac{1}{\sigma_t}\{f'(k_t) - (\mu+\rho)\} \qquad \text{(ケインズ・ラムゼイ・ルール: A-8)}$$

さて位相図の具体的なを書く。

(1) $\dot{c}=0$ 、$\dot{k}=0$ として**補助線**を引き 4 つの領域に分ける。

(2) それぞれの領域での k,c の変動方向を以下の手順で矢印によって示す。

---

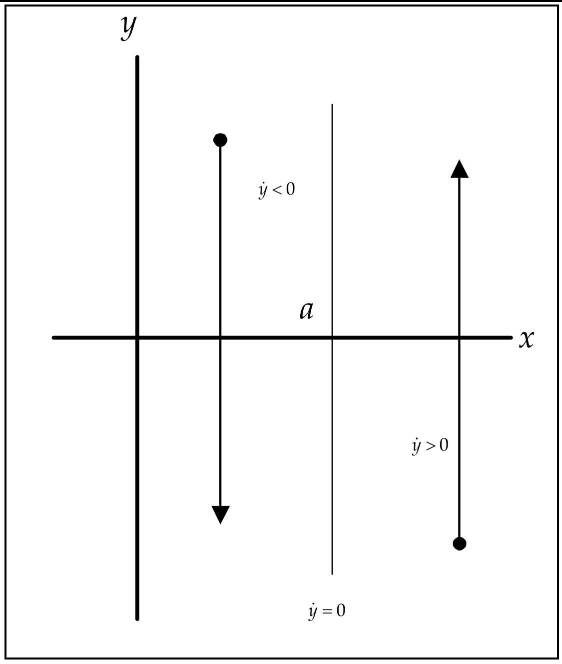
14 ρ>0 で $f'(k)$<0 だから、資本労働比率の修正黄金律水準 k^*は、図 1 の山なりの曲線の頂点を実現する黄金律水準より小さなものになる。

(2a) <u>x 軸(k)に沿った動きを横の矢印で考える。</u>
(A-2)より $\dot{k}_t$ は $f(k_t)-\mu k_t-c_t$ の符号に依存することが分かる。$\dot{k}_t=0$ を示す山なりの曲線の上では $f(k_t)-\mu k_t<c_t$ であるので $\dot{k}_t<0$ となる。そこで横の矢印は左向きであり、下側では逆に $\dot{k}_t>0$(横の矢印は右向き)となる。

(2a) <u>y 軸(c)に沿った動きを縦の矢印で考える。</u>
(A-8)より $f'(k)-(\mu+\rho)$が正であるとき、つまり $\dot{c}_t=0$ を表す垂直線の左側では $\dot{c}_t>0$ であり縦の矢印は上向きだが、右側では $f'(k)-(\mu+\rho)$が負であるので $\dot{c}_t<0$(縦の矢印は下向き)である。

(2c) この 2 方向の力に引っ張られる $\dot{k}_t$ と $\dot{c}_t$ の動きを書く。

(3) 特性根が実数・複素数に留意して**軌道**を書く。

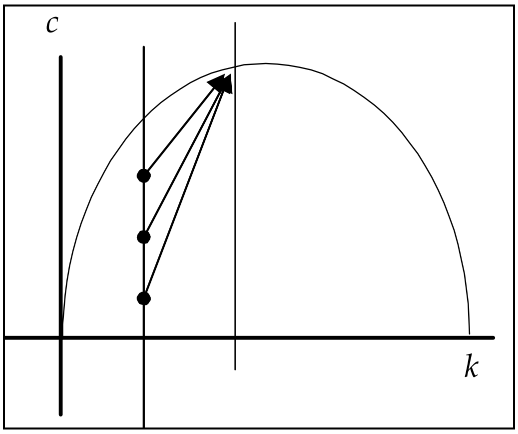


補図 $\dot{y}=x-a$ の位相図

- $x>a$ のとき $\dot{y}=x-a>0$ で y は増加してゆくので上向きの矢印が書かれている。
- $x=a$ のとき $\dot{y}=x-a=0$ で y は変化しない。
- $x<a$ のとき $\dot{y}=x-a>0$ で y は減少してゆくので下向きの矢印が書かれている。

この結果最適成長モデルは動学軌道 DD によって表され、もし出発点が(k_0,c_0)によって表されるなら、矢印に沿って E 点に向かうことになる。

さて図 1 を見れば分かることだが、ここで重要なのは、**修正黄金律経路**(k^*,c^*)が動学体系の**鞍点**(**Saddle Point**)となっている、つまり DD 以外の矢印は最適点 E に収束しないことである。初期値が DD 軌道(**鞍点経路**)上にないと、さらに E 点から離れてしまうという性質(Saddle Point Property)を持っている。通常、最適成長モデルの分析は E 点と、DD 軌道(Transition Path)に集中している。



補図 均衡経路の不決定性

一般に移行過程では

(1) 消費・生産高・実質賃金は増加するが、その増加率は減少する。

(2) 投資・実質利子率は減少するが、その減少率は減少する。

という動学プロセスの性質が得られるが、King and Rebelo (1993) は**移行過程**における経済成長を<u>数量的</u>に研究し、その中で戦後日本の高度成長が通常の収穫一定の生産関数の新古典派成長モデルで説明出来るかどうかを検討している。その帰結の一つは、1950 年の日本の利子率は 500%でなければならない、と言うものである。この理由は経済主体が将来の経済発展を予想して取引をす

ると将来の消費は爆発的に成長するわけだから、利子率は極めて高くなくては成らないことになるのである。

F. 分権的成長経路の最適性

さて以上で中央集権計画問題をのような最大化問題は一見、市場の存在を無視して単に貯蓄するか消費するかのロビンソン・クルーソーのような個人の動学的最適化問題を解いていると考えるか、あるいは中央集権的な政府が代表的な個人の効用を最大化するように問題を設定しているとも考えられる。しかし、実はその解は完全な条件付き債券(アロー証券)市場のもとでの競争的資源配分と同じであり、[15]またこのアロー・ドブリュー経済は**完全予見(Perfect Foresight)**と**代表的経済主体(Representative Agent)**の仮定のもとで **1 期ごとの貸借可能な資産市場(Sequential Loan Market)**と競争的な労働市場における資源配分と同じである場合が確かめられている。つまり最適成長モデルの最大の利点は、この単一の最大化問題により動学プロセスを簡単に記述できることにある。

以上のような中央集権計画の説明で幾つかの最適成長モデルは分析が終っていることが多い。なぜなら中央集権計画のモデルは、実は以下の留意点のもとで市場経済のモデルと一致するからである。

(1) 一次同次の生産関数のもとでの完全競争企業の導入
クルーソーは生産物の総量が所得となる資源制約式が制約となったが、以下で企業を導入すると代表的家計は企業から支払われる賃金と配当が収入となる予算制約式が制約となる。しかしここで想定する企業は一次同次の生産関数のもとでの完全競争企業なので、生産物はオイラーの法則により完全分配され、予算を制約する収入はやはり生産物の総量となる。

(2) 家計の貸し借りについての**ポンジ・ゲーム禁止条件**の導入
家計がその負債水準になんの制約もないとする(非現実的な)状況を考えると、均衡は無くなってしまう。なぜならいくらでも借りられるのだから、無限に消費を高めてその借金を借り換え続ければ良いことになってしまう。逆に現実的な制約を課すと貨幣のような本来価値のないバブル的資産を伴った均衡が生じる。

家計の最適計画

ここで考察する市場経済は多数の家計が労働市場で多数の(しかし有限個の)完全競争企業に労働を提供し、債券市場で企業から(不確実性が存在しないので株式ではなく)社債を購入する市場経

15 いわゆるアロー・ドブリュー経済と呼ばれる経済は、すべての(時間も含む)条件(S)と財(K)について市場が(S×K 個)開かれているという経済であるが、貨幣の先物市場が開かれていれば S+K 個でよい。しかし前者は他の市場参加者の選好などが価格を通じて顕示されるのに対し、後者は価格情報が少ないため、膨大な情報に合理的期待を持つ必要がある。

済を想定する。[16]ここで家計の目的関数と初期条件は先と同一のものを仮定する。

$$U=\int_{t=0}^{\infty} u(c_t)\exp\{-\rho t\}dt \qquad \textbf{(同一の目的関数: F-1)}$$

$$k_0=\bar{k}_0 \qquad \textbf{(同一の初期条件: F-2)}$$

しかし、ここで動学方程式は市場経済における家計のものと、先の中央集権計画のものとは異なる。なぜなら収入は、クルーソーのように収穫全部がそのまま収入になるのと異なり、企業が中に介在して、賃金と利子に分けられるからだ。ここで労働の(予想)実質賃金率を w_t (w_t^e)、社債の実質利子率を r_t (r_t^e)と書くと、1 人当たりの予想所得は $w_t^e+r_t^ek_t$ である。これから 1 人当たりの消費 c_t と人口成長率ならびに減価償却分を考慮してμk_t を差し引くと、1 人当たりの社債保有量 k_t の増加分は以下のようになる。

$$\dot{k}_t = w_t^e + r_t^e k_t - c_t - \mu k_t \qquad \textbf{(市場版動学方程式:F-3)}$$

なおここで、家計同士はお互いに貸し借りができないと仮定されている。

代表的家計の動学的最適化問題におけるハミルトン関数は

$$H_t=u(c_t)\exp(-\rho t)+\lambda_t(w_t^e + r_t^e k_t - c_t - \mu k_t) \qquad \text{(F-4)}$$

となり、最適解のための必要条件のなかで中央集権計画と異なるのは以下の動学方程式のみである。

$$\dot{\lambda}_t = -\frac{\partial H_t}{\partial k_t} = -\lambda_t(r_t^e - \mu) \qquad \text{(F-5)}$$

企業の最適計画

さて企業はヴェールとして導入されると冒頭に述べた。なぜなら完全競争の下では将来のすべての時点で次のような限界生産性原理が成立し、

$$f(k) - kf'(k)=w_t \qquad \textbf{(市場賃金決定: F-6)}$$

$$f'(k)=r_t \qquad \textbf{(市場利子率決定:F-7)}$$

また家計が**完全予見**(確率的なショックがある場合、**合理的期待**)を持っていると仮定されるからである。

$$w_t^e=w_t,\ r_t^e=r_t \qquad \textbf{(完全予見: F-8)}$$

この場合、(F-6)(F-7)によって(結果的に)限界生産性に等しくなる w_t^e と r_t^e を、市場版動学方程式(F-3)に代入すると最適成長モデルにおける動学方程式(A-2)に一致する。この理由は先述したとおり、1 人当たりの予想所得は $w_t^e+r_t^ek_t$ であって、それはミクロ経済学でいうオイラー法則により生産物は完全分配されるので、生産物 $f(k)$に完全予見の場合に等しくなるからである。これより、1 セクター最適成長モデルで厚生経済学の基本定理が証明された。

ポンジ・ゲーム禁止条件

さて先に家計同士が自由に貸し借りできないと仮定した。この仮定は強すぎるので、ネズミ講のような事態が起らないという条件が通常加えられる。ここで 1 人あたりの借金額を b_t とし、利子率 r_t は社債と同じと仮定すると、先の動学方程式は

16 ここで k は 1 人当たりの社債保有額とも、企業が発行する社債はすべて物的な資本が担保となっていると仮定して 1 人当たりの資本保有量とも解釈できる。

$$\dot{k}_t - \dot{b}_t = w_t^e + r_t^e (k_t - b_t) - c_t - n(k_t - b_t) \qquad \text{(動学方程式: C-9)}$$

と書き直せる。ところが、担保なしの借金の連鎖という一種のネズミ講(米国ではポンジ・ゲームと言う)の可能性が生じてしまう。そしてこのネズミ講は均衡と両立しない。そこで

$$\lim_{t\to\infty}[b_t \exp(nt)] \exp(-\int_{s=0}^{\infty} r_s^e ds) \le 0 \qquad (\textbf{NPG} : \text{C-10})$$

などの制約条件が必要になる。これは経済全体の借金総額$b_t \exp(nt)$が利子率 r_t を超える速度で増えることを禁じており、一般に**ポンジ・ゲーム禁止条件(No-Ponzi-Game (NPG) Condition)**と呼ばれている。

Kocherlakota (1992)は現実的と思われる NPG の具体的な形を考察している。一つは **Short Sales Constraint** という家計資産はある水準より少なくすることはできないという制約であり、もう一つは将来の収入の現在価値より多くは借りられないという**資産制約(Wealth Constraint)**である。これらの制約は第 3 章で述べる本来、価値のないバブル的資産である貨幣への需要を含んだ均衡が存在することを示している。

G. 最適成長モデルの拡張と疑問

> 政府の発表する日本の GNP の伸びを、私は戦時中の大本営発表みたいにしか受けとっていなかったのである。そして、資本主義経済はいずれ破綻するという、大学での古典的教えを信じ込んでいたのである。(中略)このまえの戦争で、<帝国国民>は、天皇陛下のおんために戦ったわけだが、あの奇怪なエネルギーが、今度は<GNP のおんために>爆発したのである。
>
> 小林信彦(1974)『東京のロビンソン・クルーソー』晶文社.

さて以上のような 1 セクター最適成長モデルはあまりにも経済の構造を単純化していると感じられるだろう。ここで最適成長モデルと周辺の諸モデルとの関連をいったんまとめておこう。

まず成長モデルの枠のなかで考察されているものとして

(1) **代表的経済主体**: もともとケンブリッジ成長モデルと呼ばれるモデルは労働者と資本家など**階級(Class)** の区別を行っていたが、現在では労働市場における暗黙の賃金契約や、資産価格の水準を考察する株式価格プレミアム・パズルなどで異質な経済主体を考察する必要性が高まっている。特にすべての市場が完備していない状況(**不完備市場**)では、代表的経済主体の仮定を取ることはできない。

(2) **効用関数**: 本章のモデルでは異なる時点の効用の割引現在価値を単純にたし合せていたが、消費と資産価格の研究(第 5 章)を中心として、より複雑な効用関数の研究が盛んに行われている。

(3) **生産関数**: 資本財と消費財の分離など多部門を考え、より複雑な生産構造を持つ多部門成長モデルや資本財に体化された技術革新を考慮したビンテージ型成長モデルなどがある。

(4) 貨幣やさまざまな資産を導入し、**資産選択**の側面を重視した貨幣的成長モデルなどがある。

そして成長理論の応用というよりも、すでに独立した分野として盛んに研究されている

(A) 最適成長モデルではスムーズに成長していくとされるが、現実には経済は様々に変動する。そこで景気循環を説明するために外生的な確率的ショックを導入し、シミュレーションの

手法をとったのが **RBC モデル(第 3 章)**や

(B) 最適成長モデルでは家計は未来永劫続くと仮定されるが、「人は死ぬ」とする**世代重複モデル(第 4 章)**。

(C) 技術進歩や人口成長を内生化して考えるなど直感的な様々な問題点をモデルに導入し、なぜ「富める国」と「貧しい国」があるのかを考察する**内生的成長理論(第 11 章)**。

(D) **カオス**や**分岐**により決定論モデルにおいて複雑な経済変動や景気循環を考察する諸モデル(第 4 章補論)

などは以下の章で説明される。

H. マクロ経済学の学習のための参考文献

本節では引用文献のみならず、マクロ経済学の学習のための参考文献一般を紹介する。

引用文献

Ramsey (1928) “A Mathematical Theory of Savings,” *Economic Journal* 38-152, 543-559.

Romer, P. M., (1986) “Increasing Returns and Long-run Growth,” *Journal of Political Economy*, 1986 .

Becker, Gary S., and Mulligan, Casey B. (1997) “The Endogenous Determination of Time Preference,” *Quarterly Journal of Economics*, 112-3, 729-758.

Burmeister, E., and Dobell, A.R., (1970) *Mathmatical Theories of Economic Growth*, Macmillan.(佐藤隆三･大住栄治訳『現代経済成長理論』勁草書房.)

Coleman, Wilbur John, II, (1997) “Equilibria in Distorted Infinite-Horizon Economies with Capital and Labor,” *Journal of Economic Theory* 72-2, 446-61.

Dorfman, Robert, (1969) “An Economic Interpretation of Optimal Control Theory,” *American Economic Review* 59-5, 817-31.

King, R. G., and Rebelo, S. T., (1993) “Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model,” *American Economic Review* 83-4, 908-31.

Kocherlakota, Narayana, R., (1992) “Bubbles and Constraints on Debt Accumulation,” *Journal of Economic Theory* 57, 245-56.

日本語参考文献

本章のみならず、大学院レベルのマクロ経済学の邦文参考文献として、まず経済成長論･世代重複モデル･内生的成長理論を詳しく解説したものは

- 岩井克人(1994) 「経済成長論」岩井克人･伊藤元重編『現代の経済理論』東京大学出版会.

講義スタイルで金融面のマクロ経済学に詳しいものに

- 斉藤誠 (1996) 『新しいマクロ経済学: クラシカルとケインジアンの邂逅』有斐閣.
- 豊田利久･羽森茂之(1997)『マクロ経済学 1』岩波書店.

などがある。

カオスなど内生的景気循環モデルを説明したものとして

- 西村和雄･増山幸一･吉田真理子 (1989) 「経済変動:均衡景気循環理論」伊藤元重･西村和雄編『応用ミクロ経済学』東京大学出版会.
- 矢野誠 (1994)「一般均衡理論の動学的展開」岩井克人･伊藤元重編『現代の経済理論』東京大学出版会.
- 福田慎一 (1995)『価格変動のマクロ経済学』東京大学出版会.

新ケインジアン経済学を説明したものとして

- 西村清彦 (1989)「マクロ経済学:不完全競争分析」伊藤元重･西村和雄編『応用ミクロ経済学』東京大学出版会.

などが挙げられる。近年では

- 西村和雄･福田慎一編 (2004) 『非線形均衡動学』 東京大学出版会.
- 大住圭介・川畑公久・筒井修二編 (2006) 『経済成長と動学』 勁草書房.

も出版されている

数学的準備

ただしこれらは若干の数学的準備が必要である。そこで動学的最適化の手法を経済学に即して説明したもの

として
- 西村清彦 (1990)『経済学のための最適化理論入門』東京大学出版会.
- アヴィナッシュ･ディキシット著大石泰彦他訳(1997)『経済理論における最適化』勁草書房.(Dixit, A. K., (1990) *Optimization in Economic Theory*, Oxford University Press.の邦訳)

微分方程式を説明したものとして
- 西村和雄(1982)「経済数学早わかり」日本評論社.(第 5 章)
- 神谷和也･浦井憲 (1996) 『経済学のための数学入門』 東京大学出版会.

などが挙げられる。

学部向け教科書と日本経済

なお近年のマクロ経済学の大学学部生向けの教科書としては、
- ジョセフ･E･スティグリッツ著 藪下史郎他訳 (1995)『スティグリッツ･マクロ経済学』東洋経済新報社.
- N･グレゴリー･マンキュー著足立英之他訳 (1996)『マンキュー･マクロ経済学 1 入門篇･ 2 応用篇』東洋経済新報社
- 井堀利宏 (1995)『入門マクロ経済学』新生社.

などが本章で扱った最新のトピックスを踏まえたもので薦められる。

また日本経済のマクロ分析については、学部レベルの教科書であるが有用なものとして
- 黒坂佳央･浜田宏一 (1984)『マクロ経済学と日本経済』日本評論社.
- Ito, T., (1992) *The Japanese Economy*, MIT Press.
- 福田慎一･照山博司 (1996)『マクロ経済学･入門』有斐閣.

などがある。

英文教科書

英文の教科書は大部のものが多数出版されている。
- Sargent, T. J., (1979) *Macroeconomic Theory*, Academic Press.

は貨幣的景気循環理論が盛んであった 70 年代の代表的教科書であり、同じ著者による
- Sargent, T. J., (1987) *Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press.

は様々な動学的最適化モデルと手法を手際よく説明している。また動的計画法(DP)については
Dixit, Avinash, K., and Pindyck, Robert, S, (1994) *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press.
が他の本よりはかなり平易に解説を行っている。
- Blanchard, O. J., and S. Fischer, (1989) *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press.

はケインジアン的立場に立つ代表的経済学者による教科書であるが、説明を最適成長理論から始めており、新古典派分析にも詳しい。同書は極めて大部であり、通読することは極めて困難であるが、様々なトピックスに関しては結局のところ最も分かりやすい説明を与えていることが多い。ただし、動学的最適化の手法については解説が加えられていないので、補足が必要である。この点に留意したものに
- Farmer, Roger E. A., (1993) *The Macroeconomics of Self-Fulfilling Prophecies*, MIT Press.
- Azariadis, Costas., (1993) *Intertemporal Macroeconomics*, Blackwell.

がある。 Azariadis (1994)はカオスや分岐にも詳しく、Farmer(1993)は差分方程式や OLG など基礎的諸概念を丁寧に説明している。
- Romer, David, (1996) *Advanced Macroeconomics* McGrawhill.

はさほど大部ではなく、またマクロ経済学と実証分析の関連にも詳しい。

新古典派的マクロ経済学
- Lucas, R. E., Jr., (1987) *Models of Business Cycles,* Oxford: Basil Blackwell. (邦訳「マクロ経済学のフロンティア」清水訳東洋経済新報社)

新古典派のマクロ経済学の基本的な考え方を学ぶものとしてが有用である。
- Storky, N. L. and Lucas, R. E. Jr. with Presscott, E. C., (1989) *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press.

大部の離散型 DP の教科書であり、高い評価が与えられているが、初学者には難解であろう。また Blanchard and Fischer などと異なり、これを読めばマクロ経済学の概要が頭に入るといった構成の本ではない。さらに、離散型 DP はシミュレーションのためには便利であるが、理論モデルを構成するためには連続型動学モデルのほうが容易である。
- Barro, R. J., (ed.) (1989) *Modern Business Cycle Theory*, Harvard University Press.
- Romer, P. M., (1989) "Capital Accumulation in the Theory of Long-Run Growth," in Barro, R. (ed.), *Modern Business Cycle Theory*, Harvard University Press,

なお連続型動学モデルについては Romer による章が良い。なおこの Barro 編(1990)は極めて有用なサーベ

イが多数含まれている。

- Barro, Robert J., and Sala-I-Martin, Xavier, (1995) *Economic Growth*, McGrawhill.
  内生的成長理論の教科書であるが、動学的最適化問題にも詳しく有用である。

補論 I. 動的計画法(Dynamic Programming)

動学的最適化問題の解法として最大値原理(MP)と動的計画法(DP)があることは既に述べた。MP は言わば巨大なクーン・タッカー問題(に若干の修正を加えたもの)であり、

(1) 多くの場合に**微分可能性**(Differentiability)に大幅に依存し、

(2) さまざまな制約条件や確率的変数を取扱うのが難しい。制約式が増加すると式は複雑となってゆき、制約条件が有効であるかどうかのチェックも繁雑となる。

(3) 通常の微分法に基くと、$f'(x)=0$ は極大値の必要条件ではあるが十分条件ではないし、

(4) n 個の変数で偏微分して連立(微分あるいは差分)方程式を得ても解けるとは限らない。

などの問題点がある。

これに対し DP は**離散的な問題**や**不確実性**がある場合に有効であるとされ、実際、工学や入門的教科書では、

(A) 離散的な最適経路の問題などに即して後ろ向き帰納法や実際の解の求め方、数値計算やアルゴリズムに詳しい。

ところが実際にはマクロ経済学の DP の使われ方とこれらの入門的教科書での説明とはかなり乖離がある。近年盛んな Recursive Method・・・・などと題するマクロ経済学の動学的最適化の教科書では

(B) いきなり定常割引動的計画法を述べ、不変政策関数(Invariant Policy Function)や縮小写像(Contraction Mapping)、無限に繰り返す性質(**Recursive Nature**) などが説明される。

たしかにマクロ経済学では(B)のような方法が使われるのが一般的であるが、これだけでは直観的なイメージがつかみにくい。しかし(A)ではマクロ経済学で実際に使われる DP の解説がない。

そこで本稿では(A)と(B)の両者並びに

(C) 最大値原理との関係。

を一通り説明することにする。

Bellman の最適性原理

まず動的計画法の基礎をなす Bellman の最適性原理を説明しよう。[17]

> Bellman **の最適性原理**(Principle of Optimality)
>
> (1) 最適経路はどの時点においても、その時点以前にとった意思決定にかかわらず、その時点以降の経路は、その時点での状態変数の値を初期値とした最適経路となっている。
>
> (2) (簡単に(1)を言換えると)最適経路の部分経路はやはり最適である。
>
> (3) (簡単に(1)を言換えると)いったん最適経路にいたら、最適経路に留まることがやはり最適である。

以上の Bellman の最適性原理はあまりに抽象的である。そこで以下の例を考えてみよう。

最適経路

ここで下の図で A 点から E 点まで行く最短距離を考えよう。明らかに一直線の ABCDE である。このとき、部分経路 BCDE はやはり、B 点から E 点までの最短経路となっている。

なんだか当り前過ぎるが、いわゆるオペレーションズ・リサーチなどの分野では「**最適政策(Optimal Policy)**」つまりどのような行動を取るかを求める**後ろ向き帰納法**(Backward Induction)については様々な解説があり、迷路を出口からたどるように、最終期から最適経路を順々に決めていく方法が詳述されている。しかしこの方法は最終期から順々に解いていくわけであるから、経済学で重要な無限期間を考えると、もちろん後ろ向きに解くことは出来ない。

通常、経済学で使われるのは以下で述べる最大価値関数あるいは状態評価関数から出発する方法である。そこでは

(1) 最大価値関数を定義する。

(2) ベルマン(関数再帰)方程式を導く。

(3) ベルマン(関数再帰)方程式を解いて、最適決定列を導く。

の手順で行われる。

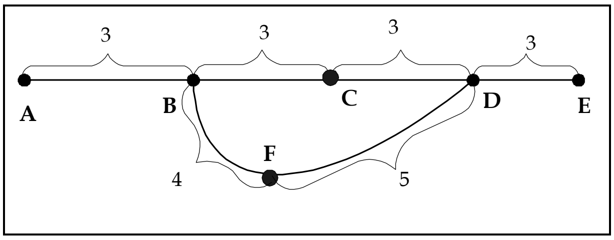


図2 DP と最適経路

最適成長モデルと最大値原理

さて 1 セクター最適成長モデルに即し、0 期の資本量を k_0、最終期である T 期の資本量を k_T として、目的関数

$$\max V_0 \equiv \sum_{t=0}^{T} u_t(c_t) \qquad \text{(目的関数:1)}$$

を以下の制約をもとに最大化する問題を DP で考えよう。

$$k_{t+1} - k_t = f_t(k_t) - c_t \qquad \text{(遷移式:2)}$$

さてこの問題では目的関数は制約条件は(時間)加法的となっており、$0<t<T$ なる途中の時点 t での**最大価値関数(Maximum Value Function)**を $V_t(k_t)$ と書き、0 期の目的関数を y_0 の関数 $V_0(y_0)$と書く。

ここで t 期の最大化問題を今期のみの 1 期間効用関数 $u(c_t)$と来期以降の最大価値関数 $V_{t+1}(k_{t+1})$に分割する。任意の t 期について以下の**ベルマン方程式**(Bellman's Function)を考える。[18]

17 「原理(Principle)」とは通常、証明できるような命題には使われないが、伝統的にこう使われている。

18 あるいは**関数方程式**(Functional Function) や**最適方程式**(Optimality Function)、あるいは**基本的再帰関係式**(Fundamental Recurrence Relation)など様々に呼ばれる。

$$\underbrace{V_t(k_t)}_{\substack{\text{Value Function}\\ \text{at } t}} = \max\{ \underbrace{u_t(c_t)}_{\substack{\text{One-Period}\\ \text{Return Function}}} + \underbrace{V_{t+1}(k_{t+1})}_{\substack{\text{Value Function}\\ \text{at } t+1}} \} \qquad \text{(ベルマン方程式:3)}$$

このように左辺 $V_t(k_t)$は t 期の最大価値関数であるが、それは今期のみの部分系列と来期以降の最大価値関数の和を最大化する問題として表される。なぜなら、最適性の原理から最適系列の部分系列は常に最適であるからである。

このベルマン方程式をどのように解くかについては

(1) シミュレーションにより数値計算する

(2) 最大価値関数の形を予想する(Guess)

(3) 偏微分して偏微分方程式を求め、それが解けるならば解く。

などの方法がある。

最大値原理との関係

(3)式で k_{t+1} を消去して

$$\underbrace{V_t(k_t)}_{\substack{\text{Value Function}\\ \text{at } t}} = \max_{z_t}\{ \underbrace{u_t(c_t)}_{\substack{\text{One-Period}\\ \text{Return Function}}} + \underbrace{V_{t+1}(f(k_t)-c_t+k_t)}_{\substack{\text{Value Function}\\ \text{at } t+1}} \} \tag{4}$$

が得られる。c_t で偏微分すると

$$\frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t} - \frac{\partial V_{t+1}(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} = 0 \tag{5}$$

の条件式が得られる。ここで、

$$\frac{\partial V_{t+1}(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} = \lambda_t \tag{6}$$

と定義すれば、最大値原理と同じ結果が得られることが分かる。

MP のほうが DP よりも

・MP: $\lambda = \dfrac{\partial V}{\partial K}$ のみを知れば良いが

・DP: V 全体を知らなくてはならない。

という意味で情報を節約している。DP は効用の次元(V)で、MP は(帰属)価格で問題を扱っている。

定常割引動的計画法

以上のような DP のやや繁雑な説明とは異なり、経済学で近年、多用される**定常割引動的計画法**(SDDP: **Stationary Discounted Dynamic Programming**)の説明は数学が多用されていることが多い。

SDDP では無限期間に DP を拡張するが、無限期間なので後ろ向き帰納法が使えない。そこで解が存在すると仮定し、また収益関数を割引要素ρ を導入して

$$u_t(c_t)=\rho^t u(c_t) \qquad \text{*左辺の } u_t \text{ と右辺の添字 } t \text{ のない } u \text{ に注意} \tag{7}$$

と書き換える。

また制約条件は時間 t に依存しないとすると、端的には V_t=max $\{u(c_t)+\rho V_{t+1}\}$となる。この場合、問題は最大価値関数 V が一定値に収束するかどうかである。もちろんさまざまな数学的諸条件に依存するが、上式は言わば関数 V を変数と考えると $x_t=a+\rho x_{t+1}$ のような一階の差分方程式であり、

なおかつ割引要素ρは定義より 1 より小さいので、多くの場合収束する。[19]

一般的には r を 1 期間収益関数、x を状態変数、u を操作変数として

$$V(x)=\max_u\{r(x,u)+\rho V(\tilde{x})\} \tag{8}$$

と書かれるが、これは上記の仮定のもとで

$$V(x_0)=\max_{\{u_s\}_{s=0}^{\infty}}\sum_{t=0}^{\infty}\rho^t r(x_t,u_t) \tag{9}$$

であり、関数方程式はユニークな Concave Function である。

そこで様々な条件のもとで最大価値関数は微分可能であり

$$V'(x)=\frac{\partial r}{\partial x}[x,h(x)]+\rho\frac{\partial g}{\partial x}[x,h(x)]V'(g[x,h(x)]) \tag{10}$$

は Benveniste and Schinkman (1979)の便利な公式が成立する。ここで g は環境制約式、h は以下で表されるこれは**時間不変最適政策関数**(Time Invariant Policy Function)

$$u_t=h(x_t) \tag{11}$$

を意味し、状態 x が決れば操作変数 u が時間にかかわらず決定されるのである。

19　これは厳密には縮小写像(Contraction Mapping)の定理を使って証明される。