2011.03.04

3重周期極小曲面

堀井 克己

1. はじめに

３次元空間内に与えられた閉曲線を境界にもつ曲面のなかで面積が極小である曲面を極小曲面といい、この曲面を求める問題をプラトー問題という。ベルギーの物理学者である Plateau は閉曲線の形状をいろいろ変えた石鹸膜の実験を行いさまざまな極小曲面が得られることを発見した。数理総論のセミナーでも酒井先生が石鹸膜実験を実演され、いろいろな形をした閉曲線ごとに多様な極小曲面がつくられることを観察した。

閉曲線が平面内にあるときは、石鹸膜が張る曲面は（極小曲面のなかで最も単純な）平面になるが、対角線で折り曲げた斜交４辺形（skew quadrilateral）の場合は、１つの対角線にそって下に凸で、もう一方の対角線にそって上に凸な曲面ができる。斜交４辺形は単純な境界条件であるので、面積を最小化するという変分問題に適用すればこの問題の極小曲面は簡単に求められるのではないかと予想した。しかしこの問題は簡単ではなかった。

本レポートは、数理総論の課題ポートとして、斜交４辺形の境界に対する極小曲面とこれをユニットにして構成した３重周期極小曲面について、現時点で知りえたことをまとめたものである。

2. 極小曲面（[WE],[Km]など）

極小曲面とは、平均曲率が恒等的にゼロである曲面として定義される。極小曲面は、$(x, y, z(x, y))$のように、パラメータ表示されるものとする。このとき Lagrange の微分方程式

$$(1+z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1+z_x^2)z_{yy} = 0 .$$

を満たす。与えられた境界に対する極小曲面をみつける問題は変分問題である。極小曲面は、与えられた境界条件に対して曲面の面積が極小であると特徴付けられる。平面は自明な極小曲面であり、非自明な極小曲面としてはカテノイドやヘリコイドなどがみつけられている。一般的なケースに対しては、解の存在が Douglas と Rado によって独立に証明されている。彼らの解析は特異点の可能性を排除するものではない。これに対して、Osserman と Gulliver は曲面積の最小解は特異点をもつことができないことを証明している。

境界のない完備なものとして知られている唯一のもの、すなわち、埋め込みで自己交叉のない極小曲面は、カテノイド、ヘリコイドおよび平面しかないと考えられてきた。Hoffman は種数１の３つの端部をもつ埋め込み曲面を発見した。

極小曲面(x, y, z)は、微分可能な複素数値関数 $f(w)$ を用いて次のように表わされる[Km]。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{Re}\begin{pmatrix} \int_{w_0}^{w} (1-w^2) f(w) dw \\ \int_{w_0}^{w} i(1+w^2) f(w) dw \\ \int_{w_0}^{w} 2wf(w) dw \end{pmatrix}$$

この表現公式は Enneper と Weierstrass によって互いに独立に導かれ Weierstrass-Enneper の表現公式と呼ばれている。空間４辺形で張られる極小曲面は Schwarz と Riemann によって発見された。$f(w)$ は次式で与えられる［Km］。

$$f(w) = \left(1 - 14w^4 + w^8\right)^{-1/2}$$

３. Schwarz の周期的極小曲面

Schwarz は小さなユニットの極小曲面から大きな極小曲面を構成するのに用いる次の２つの法則を見つけた（Schwarz の鏡像原理と呼ばれる、[We]）。

① 極小曲面の境界が直線であるときには、その直線に関して反転させたものと元の曲面をつないでも極小曲面になる。

② 極小曲面が平面と直角に交わるときには、この平面に関して曲面の鏡像をとったものを元の曲面とつないでも極小曲面になる。

図１は斜交４辺形で張られる極小曲面から、鏡像原理を用いて構成した極小曲面の一部の立方体ユニットである。さらにこのユニットを、３方向に展開したものが Schwarz の P 曲面であり、3 重周期の極小曲面になっている(図 2)。なお、極小曲面の構成法の詳細は[Di], [Ni],[S]などを参照されたい。

前述したとおり、Plateau 問題の極小曲面については解の存在は証明されてはいるものの、どんな境界条件に対しても実際に解を求めることは大変困難である。このため、問題を離散化して、数値解析的に解を求める研究も多く行われている（例えば、[Kk],[H],[M]など）。なお、Schwarz の曲面は、$\{(x, y, z = z(x, y)) : 2|x \pm y| \le \ell\}$ の形で、nonparametrically に表わすことができ、双曲放物体 $\{(x, y, z = \sqrt{2(x^2 - y^2)}/\ell) : 2|x \pm y| \le \ell\}$ として近似的によく表わすことができる。厳密解と近似式の２つの曲面積の比は 1.0012 である[Ni]。

参考文献

[Da] Denis Dalpe：Schwarz's Surface and the Theory of Minimal Surface, Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science at Concordia University, Canada. 1998.

[Di] U. Dierkes, S. Hildebrandt, F. Sauvigny：Minimal Surfaces, Springer, 2010.

[F] 藤森祥一：極小曲面を視る, 数学セミナー, 580, 2010.1.

[H] M. Hinata, M. Shimasaki, T. Kiyono：Numerical Solution of Plateau's Problem by a Finite Element Method, Mathematics. of Computation, 28-125, pp.45-60, 1974.

[K] 剣持勝衛：曲面の微分幾何（可視化の技術と現代幾何学, 岩波書店），2010.
[Kk] 小林健太：J. Douglas の汎関数を用いた極小曲面の数値計算法, 日本応用数理学会論文誌, 10-1, 21-35, 2000.3.
[Km] 小磯深幸：プラトー問題と最近の発展, 数学セミナー, 580, 2010.1.
[M] 森正武 ： 有限要素法とその応用, 岩波応用数学叢書.
[Na] 中内伸光：極小曲面とは？石けん膜の幾何学, 数学セミナー, 580, 2010.1.
[Ni] J. C. C. Nitsche：Lectures on Monimal Surfaces, Vol.1, Cambridge Univ. Press, 1989.
[S] 庄田敏宏：Schwarz Diamond 曲面の構成法, extwww.cc.saga-u.ac.jp/tshoda/shoda-home-j.html.
[WE] Eric W. Weisstein：CRC Encyclopedia of Mathematics, Vol.2, p.2511, CRC Press, 2009.
[We] D.ウエルズ（宮崎,藤井,日置,山口訳）：不思議おもしろ 幾何学事典, 朝倉書店, 2002.

図 1　　Schwarz の P 曲面　(6 個の管はそれぞれ隣接ユニットにつながる)

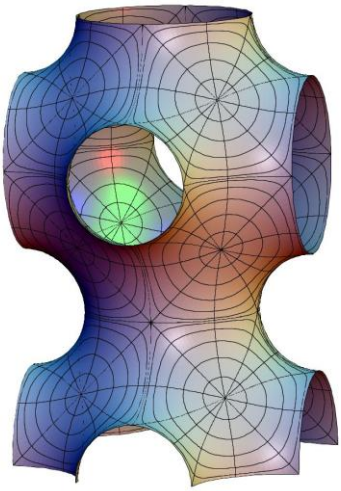
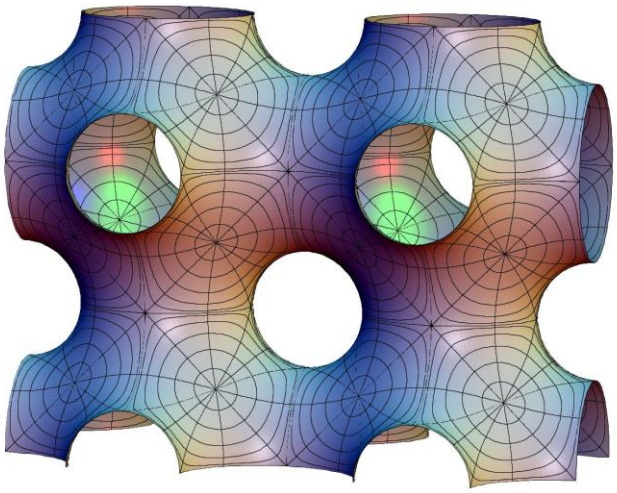
図 2　　Schwarz の P 曲面から生成された 3 重周期曲面