Bounded cohomology and hyperbolic 3-manifolds

相馬 輝彦（東京電機大学 理工学部）

離散群の有界コホモロジー (bounded cohomology) の概念は P. Trauber によって導入され，位相空間に関しても本質的に同値な概念が M. Gromov [6] によって定義された．Gromov の論文 [4] が発表されてから現在に至るまで，特に 2 次の有界コホモロジーを中心に様々な結果が得られている（例えば R. Grigorchuk [5] の参考文献を見よ）．有界コホモロジーは通常のコホモロジーと同様ホモトピー不変量である．言うまでもなく，不変量の “強さ” は

ホモトピー不変量 $<$ 位相的不変量 $<$ 幾何的不変量

の順である．講演者は論文 [12]–[15] において，中間の「位相的不変量」を経由せずに，直接的に 3 次有界コホモロジーと無限体積の双曲 3 次元多様体（幾何的不変量）との相互関係を研究した．

「3 次有界コホモロジー」 $\Longleftrightarrow$ 「無限体積の双曲 3 次元多様体」

§1．定義および基本的性質

X を位相空間とし，$(C_*(X), \partial_*)$ を実係数の特異鎖複体とする．k-鎖 $c = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i^k \in C_k(X)$ の **Gromov ノルム**は

$$||c|| = \sum_{i=1}^n |a_i|$$

で定義される．このとき，$(C_*(X), || \cdot ||)$ のノルム空間としての完備化 $C_*^{l^1}(X)$ を考える．すなわち，$C_k^{l^1}(X)$ は $||c|| = \sum_{i=1}^\infty |a_i| < \infty$ であるような級数 $c = \sum_{i=1}^\infty a_i \sigma_i^k$ 全体のなす空間である．境界作用素 $\partial_k : C_k(X) \longrightarrow C_{k-1}(X)$ は自然な拡張

$$\partial_k^{l^1} : C_k^{l^1}(X) \longrightarrow C_{k-1}^{l^1}(X)$$

日本数学会年会・トポロジー分科会特別講演,（於）名城大学，1998 年 3 月 27 日

をもつ．Banach 空間 $(C_*^{l^1}(X), ||\cdot||)$ の双対空間 $(C_b^*(X), ||\cdot||_{(\infty)})$ と，$\partial_{k+1}^{l^1}$ の双対境界作用素 $\delta_b^k : C_b^k(X) \longrightarrow C_b^{k+1}(X)$ は X の**有界コホモロジー** (bounded cohomology)

$$H_b^*(X;\mathbf{R}) = H^*(C_b^*(X))$$

を定義する．このとき，$H_b^k(X;\mathbf{R})$ の各元 α の擬ノルム (pseudonorm, seminorm) $||\alpha||$ が

$$||\alpha|| = \inf\{||c||; c \in Z_b^k(X) = \mathrm{Ker}(\delta_b^k) \text{ with } [c] = \alpha\}$$

で与えられる．次節で示すように，この擬ノルムはノルムとは限らない．したがって，有界コホモロジーのみではなく，その商ベクトル空間

$$HB^k(X;\mathbf{R}) = H_b^k(X;\mathbf{R})/\{[c] \in H_b^k(X;\mathbf{R}); ||[c]|| = 0\}$$

を考えることは意味をもつ．$HB^k(X;\mathbf{R})$ はノルム $||\cdot||$ をもつ Banach 空間である．$H_b^k(X;\mathbf{R})$ の元 $[c]$ に対応する $HB^k(X;\mathbf{R})$ の元を $[c]_B$ で表すことにする．

任意の離散群 G に対しても，有界コホモロジー $H_b^*(G;\mathbf{R})$ が代数的に定義できる．Gromov [6] と Ivanov [7] は，任意の弧状連結空間 X に対して $(H_b^*(X,\mathbf{R}), ||\cdot||)$ と $(H_b^*(\pi_1(X);\mathbf{R}), ||\cdot||)$ は等長的に同型であることを示した．また G が amenable 群のとき，任意の整数 $k > 0$ に対して，$H_b^k(G,\mathbf{R}) = \{0\}$ である ([6])．定義から容易に示されるように，任意の位相空間 X に対して $H_b^1(X;\mathbf{R}) = \{0\}$ なので，2 次以上の有界コホモロジーのみが研究対称となり得る．Σ_g を種数 g の向き付け可能で連結な閉曲面とする．$g = 0, 1$ のとき，$\pi_1(\Sigma_g)$ はアーベル群であるから，$k > 0$ に対して $H_b^k(\Sigma_g;\mathbf{R}) = \{0\}$ である．一方 $g > 1$ のとき，$H_b^2(\Sigma_g;\mathbf{R})$ の次元の研究は，Brooks [1] に始まり，最終的に Mitsumatsu [10] よって $\dim H_b^2(\Sigma_g;\mathbf{R}) = \#\mathbf{R}$ （連続濃度次元のベクトル空間）であることが示された．この結果は，Epstein-Fujiwara [4] によって一般化され，任意の非初等的双曲的群 (hyperbolic group) G に対して，$\dim H_b^2(G;\mathbf{R}) = \#\mathbf{R}$ が証明された．

§2. 擬ノルムをもつ有界コホモロジー

有界コホモロジーの特長の一つとして，前節で定義したような擬ノルムをもつことが挙げられる．

「ノルムではない擬ノルムをもつ有界コホモロジーが存在するか？」

という問題は，Gromov [6], Ivanov [7] 等によって提起されて以来，未解決のまま残っていた．Soma [14] では，Matsumoto-Morita [8] の結果を利用することによって，このような擬ノルムが存在することをはじめて証明した．

l^1-鎖複体 $(C_*^{l^1}(X), \partial_*^{l^1})$ が k-**一様有界条件** (k-uniform boundary condition, k-UBC$^{l^1}$) をみたすとは，ある定数 $L > 0$ が存在し，任意の $z \in B_k^{l^1} = \mathrm{Im}(\partial_{k+1}^{l^1})$ に対し $\partial_{k+1}(c) = z$, $||c|| \leq L||z||$ をみたすような $C_{k+1}^{l^1}(X)$ の元 c がとれることをいう．

定理 2.1. (Matsumoto-Morita [8]) $H_b^k(X; \mathbf{R})$ 上の擬ノルム $||\cdot||$ がノルムであるための必要十分条件は $(C_*^{l^1}(X), \partial_*^{l^1})$ が $(k-1)$-UBC$^{l^1}$ をみたすことである．

実際，彼らはこの定理を使って 2 次以下の有界コホモロジーの擬ノルムはすべてノルムであることを示した．一方，次の定理が示すように，階数 2 以上の自由群や種数 2 以上の向き付け可能な閉曲面の基本群 G の 3 次有界コホモロジー $H_b^3(G; \mathbf{R})$ 上の擬ノルムはノルムではない．

定理 2.2. (Soma [14]) 全射準同型 $f : G \longrightarrow \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ を許すような任意の離散群 G に対して，$H_b^3(G; \mathbf{R})$ 上の擬ノルム $||\cdot||$ はノルムではない．

実際，この定理を証明するためには $G = \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ の場合を考えれば十分である．S^3 内の figure eight knot K の補空間 $S^3 - K$ を M とする．K は種数 1 の fibered knot であるから，M は S^1 上の once-punctured torus T°-束の構造をもつ．さらに，M が完備な双曲構造をもつことはよく知られている (Thurston [16])．$p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ を $\pi_1(T^\circ) \subset \pi_1(M)$ に同伴する無限巡回被覆とする．$\widetilde{M}$ は M から p を使って誘導された双曲構造をもつ．この双曲構造を利用して，$(C_*^{l^1}(\widetilde{M}), \partial_*^{l^1})$ が 2-UBC$^{l^1}$ を満たさないことを示すことができる．$\pi_1(\widetilde{M}) \cong \pi_1(T^\circ) \cong \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ であるから，$H_b^3(\mathbf{Z} * \mathbf{Z}; \mathbf{R})$ 上の擬ノルムがノルムでないことが示されたことになる．

さらに，同様の議論により次が示せる．

定理 2.3. ([14]) 5 以上の任意の整数 q に対して，有限生成離散群 G_q で，その q-次有界コホモロジー $H_b^q(G_q; \mathbf{R})$ 上の擬ノルムがノルムで

はないものが存在する．

実際，H を $(q-3)$-次元の向き付け可能な双曲閉多様体とするとき，基本群 $G_q = \pi_1(\Sigma_g \times H)$ は定理 2.3 の性質を持つ．

注意．$N^q(X) = \{\alpha \in H_b^q(X;\mathbf{R}); ||\alpha|| = 0\}$ を $H_b^q(X;\mathbf{R})$ の**零ノルム空間**と呼ぶ．定理 2.2, 2.3 の証明は定理 2.1 (Matsumoto-Morita [8]) に依っているが，彼らの証明は Hahn-Banach の定理を本質的に使っているので，$N^3(\Sigma_g)$ の非自明な元を具体的には構成できなかった．その後，Soma [15] においてはじめて具体的な構成が可能になった．$N^3(\Sigma_g)$ 内の 1 次独立な元からなる連続濃度集合を作ることができるので，特に次が成り立つ．

定理 2.4. ([15]) $g > 1$ のとき，$\dim N^3(\Sigma_g) = \#\mathbf{R}$.

実際の証明中では，$\Sigma_g \times \mathbf{R}$ 上の双曲構造と，(錐形の特異点集合をもつ）ユークリッド構造の両方を組み合わせることによって，$N^3(\Sigma_g)$ の非自明な元が構成されている．

§3．双曲 3 次元多様体の基本類と剛体性定理

$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^3)$ の離散部分群 Γ を**クライン群**という．我々の扱うクライン群 Γ はつねに有限生成であり，また有限位数の元をもたない (torsion free) と仮定する．このとき，$M_\Gamma = \mathbf{H}^3/\Gamma$ は双曲 3 次元多様体であり，自然な等化写像 $p : \mathbf{H}^3 \longrightarrow M_\Gamma$ は普遍被覆である．特に，M_Γ がコンパクトな 3 次元多様体の内部に同相なとき，Γ は**位相的 tame クライン群**と呼ばれる．M_Γ が convex core をもつとき，Γ は**幾何的有限クライン群**といい，そうでないときは**幾何的無限クライン群**という．幾何的有限クライン群は位相的 tame であることが知られている（例えば Thurston [16] 参照）．

M_Γ 上の 3-コサイクル ω_Γ を，任意の特異 3-単体 $\sigma : \Delta^3 \longrightarrow M_\Gamma$ に対して，

$$\omega_\Gamma(\sigma) = \int_{\Delta^3} \mathrm{straight}(\sigma)^*(\Omega_\Gamma)$$

で定義する．ただし，Ω_Γ は M_Γ 上の体積要素とする．M_Γ 内の直 3-単体の体積は $\mathbf{H}^3$ 内の仮想正 3-単体の体積 $\mathbf{v}_3$ より小さいので，$|\omega_\Gamma(\sigma)| = |\Omega_\Gamma(\mathrm{straight}(\sigma))| < \mathbf{v}_3$ が成り立つ．よって，$[\omega_\Gamma]$ は $H_b^3(M_\Gamma;\mathbf{R})$ の元であるが，それを M_Γ の**基本（有界コホモロジー）類**という．そのノ

ルムは

$$|||[\omega_\Gamma]||| \leq ||\omega_\Gamma|| = \mathbf{v}_3$$

をみたす.

Canary [2] の結果を利用して次が示される．この定理から，位相的 tame クライン群 Γ の基本類と Γ の幾何的有限（無限）性が関連を持っていることが分かる.

定理 3.1. (Soma [12]) Γ を $M_\Gamma = \mathbf{H}^3/\Gamma$ の体積が無限であるような位相的 tame クライン群とする．このとき，次の 3 条件は同値である.

(i) Γ は幾何的無限.

(ii) $H_b^3(M_\Gamma; \mathbf{R})$ において $[\omega_\Gamma] \neq 0$.

(iii) $|||[\omega_\Gamma]||| = \mathbf{v}_3$.

したがって特に，$[\omega_\Gamma] \neq 0$ in $H_b^3(M_\Gamma; \mathbf{R})$ であるための必要十分条件は，$[\omega_\Gamma]_B \neq 0$ in $HB^3(M_\Gamma; \mathbf{R})$ である.

ここで，$\Sigma_g \times \mathbf{R}$ 上の双曲構造の "Teichmüller" 空間を考える．ホトモピー同値写像 $f : \Sigma_g \longrightarrow M_\Gamma$ を許すような双曲 3 次元多様体 $M_\Gamma = \mathbf{H}^3/\Gamma$ は，$\Sigma \times \mathbf{R}$ に同相である．このような対 (M_Γ, f) と $(M_{\Gamma'}, f')$ が**同値**であるとは，$\alpha \circ f$ が f にホモトピックであるような向きを保つ等長写像 $\alpha : M_\Gamma \longrightarrow M_{\Gamma'}$ が存在することをいう．このような同値類全体の集合を $\mathcal{H}(\Sigma_g)$ とかく．$\mathcal{H}(\Sigma_g)$ において，$(M_\Gamma, f) = (M_{\Gamma'}, f')$ であれば，明らかに $H_b^3(\Sigma_g; \mathbf{R})$ において $[f^*(\omega_\Gamma)] = [f'^*(\omega_{\Gamma'})]$ が成り立つ．したがって特に，$|||[f^*(\omega_\Gamma)] - [f'^*(\omega_{\Gamma'})]||| = 0$ である．これは，$\mathcal{H}(\Sigma_g)$ の 2 つの元が

「幾何的に等しければコホモロジー的にも等しい」

を意味する．明らかにこの逆は成り立たない．たとえば，Γ, Γ' が幾何的有限のときは定理 3.1 より，$[f^*(\omega_\Gamma)] = [f'^*(\omega_{\Gamma'})] = 0$ である．しかし，このような例で M_Γ と $M_{\Gamma'}$ が等長的でないものはいくらでも構成できる．そこで，2 重に退化している双曲多様体のみを考えることにする．$(M_\Gamma, f) \in \mathcal{H}(\Sigma_g)$ が **2 重に退化している**とは，M_Γ の 2 つのエンドがいずれも幾何的無限であることを意味する.

問題 3.2. $(M_\Gamma, f), (M_{\Gamma'}, f')$ を $\mathcal{H}(\Sigma_g)$ の 2 重に退化している元とする．このとき，$|||[f^*(\omega_\Gamma)] - [f'^*(\omega_{\Gamma'})]||| = 0$ であれば，$\mathcal{H}(\Sigma_g)$ において

$(M, f) = (M', f')$ か？

つまり，2 重に退化している $\mathcal{H}(\Sigma_g)$ の元に対して，

「コホモロジー的に等しければ幾何的にも等しいか？」

を問題にしている．単射半径 $\mathrm{inj}(M_\Gamma) = \inf\{\mathrm{inj}_{M_\Gamma}(x); x \in M_\Gamma\} > 0$ であるような元 (M_Γ, g) 全体からなる $\mathcal{H}(\Sigma_g)$ の部分集合を $\mathcal{H}_+(\Sigma_g)$ とおく．このとき，問題 3.2 の部分解として次が成り立つ．

定理 3.3. (Soma [13]) (M_Γ, f) を $\mathcal{H}_+(\Sigma_g)$ の 2 重に退化している元で，$\mathrm{inj}(M_\Gamma) \geq i_0 > 0$ とする．このとき，次の性質 (*) をみたす g と i_0 のみによる定数 $\varepsilon(g, i_0) > 0$ が存在する．

(*) $||[f^*(\omega_\Gamma)] - [f'^*(\omega_{\Gamma'})]|| < \varepsilon$ となる任意の $(M_{\Gamma'}, f') \in \mathcal{H}_+(\Sigma_g)$ は (M_Γ, f) に同値である．

定理 3.3 は，2 重に退化している $\mathcal{H}_+(\Sigma_g)$ の元に対しては，必ずしも「コホモロジー的に等しい」ことを仮定しなくても，

「コホモロジー的に近ければ幾何的に等しい」

が成立することを示している．[13] で与えられた証明は簡潔なものとはいえないが，証明の大筋とアイデアに関しては Soma [11] を参照してほしい．実際，この証明は Minsky のエンディング・ラミネーション定理 [9] を本質的に利用している．しかし，Minsky の定理は $\mathcal{H}_+(\Sigma_g)$ の元に対してのみ成立するものなので，問題 3.2 の完全な解答を得るには，定理 3.3 の証明とは別の議論が必要であると思う．

$\{[f^*(\omega_M)]_B; (M, f) \in \mathcal{H}_+(\Sigma_g)\}$, $\{[f^*(\omega_M)]_B; (M, f) \in \mathcal{H}(\Sigma_g)\}$ を含む $HB^3(\Sigma_g; \mathbf{R})$ の最小 Banach 部分空間をそれぞれ $E_+(g)$, $E(g)$ とする．したがって，$E_{(+)}(g)$ の任意の元は $[f^*(\omega_M)]_B$ 型の元（ただし $(M, f) \in \mathcal{H}_{(+)}(\Sigma_g)$）の列がつくる級数である．$E_+(g)$, $E(g)$ の定義より，

$$\dim E_+(g) \leq \dim E(g) \leq \dim HB^3(\Sigma_g; \mathbf{R}) \leq \dim H_b^3(\Sigma_g; \mathbf{R}) \leq \#\mathbf{R}$$

が成り立つ．もし $E_+(g)$ が有限次元ならば，無限個の元からなる集合 $\{[f^*(\omega_M)]_B; (M, f) \in \mathcal{H}_+(\Sigma_g)\}$ がコンパクト集合 $\{\mathbf{x} \in E_+(g); ||\mathbf{x}|| = \mathbf{v}_3\}$ 上にあることになるが，これは明らかに定理 3.3 に矛盾する．したがって，次の系が得られる．

系 3.4. ([13]) $\dim E_+(g) = \#\mathbf{R}$. したがって特に，$\dim H_b^3(\Sigma_g;\mathbf{R}) = \dim HB^3(\Sigma_g;\mathbf{R}) = \#\mathbf{R}$.

$H_b^3(\Sigma_g;\mathbf{R})$ が無限次元であることは既に，Yoshida [17] で証明されている．[17] の証明を改良すれば系 3.4 の別証明ができるが，講演者は有界コホモロジーの次元自体はそれほど問題にはしていない．それよりも，双曲 3 次元多様体を使って表現できる空間 $E(g)$ が $HB^3(\Sigma_g;\mathbf{R})$ の中のどれ位の部分を占めるかに関心がある．特に，$E_+(g) = HB^3(\Sigma_g;\mathbf{R})$ または $E(g) = HB^3(\Sigma_g;\mathbf{R})$ が成り立つかどうかは自然な問題である．しかし次の系は，$E_+(g)$ や $E(g)$ が $HB^3(\Sigma_g;\mathbf{R})$ の中の非常に小さな部分しか占有していないことを示している．

系 3.5. ([12]) $\dim HB^3(\Sigma_g;\mathbf{R})/E(g) = \#\mathbf{R}$.

この系は，上の定理 3.1 と Canary の被覆定理 ([3, Corollary D]) を使って証明される．

参考文献

1. R. Brooks, Some remarks on bounded cohomology, Riemann surfaces and related topics (I. Kra, B. Maskit eds.), Ann. of Math. Studies no. 97, Princeton Univ. Press, 1981, 53-63.
2. R. Canary, Ends of hyperbolic 3-manifolds, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993) 1-35.
3. ______ , A covering theorem for hyperbolic 3-manifolds and its applications, Topology **35** (1996) 751-778.
4. D. Epstein and K. Fujiwara, The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups, Topology **36** (1997) 1275-1289.
5. R. Grigorchuk, Some results on bounded cohomology, Combinatorial and geometric group theory, London Math. Soc. Lecture Note Series 204, Cambridge Univ. Press, 1995, 111-163.
6. M. Gromov, Volume and bounded cohomology, Publ. Math. Inst. Huates Etud. Sci. **56** (1982) 5-100.
7. N. Ivanov, Foundations of the theory of bounded cohomology, J. Soviet Math. **37** (1987) 1090-1114.
8. S. Matsumoto and S. Morita, Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985) 539-544.

9. Y. Minsky, On rigidity, limit sets and end invariants of hyperbolic 3-manifolds, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994) 539-588.

10. Y. Mitsumatsu, Bounded cohomology and l^1-homology of surfaces, Topology **23** (1984), 465-471.

11. T. Soma, The third bounded cohomology and Kleinian groups, Topology and Teichmüller spaces (S. Kojima et al. eds.), World Scientific Publ. Co., 1996, 265-277.

12. ———, Bounded cohomology and topologically tame Kleinian groups, Duke Math. J. **88** (1997) 357-370.

13. ———, Bounded cohomology of closed surfaces, Topology **36** (1997) 1221-1246.

14. ———, Existence of non-Banach bounded cohomology, Topology **37** (1998) 179-193.

15. ———, The zero-norm subspace of bounded cohomology, Comment. Math. Helv. **72** (1997), to appear in No. 4.

16. W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Lect. Notes, Princeton Univ., 1978.

17. T. Yoshida, On 3-dimensional bounded cohomology of surfaces, Homotopy Theory and Related Topics (H. Toda ed.), Advanced Studies in Pure Math. vol. 9, Kinokuniya, 1986, 173-176.