既約3次元多様体の幾何とトポロジー

相馬 輝彦　(首都大学東京)*

2016年9月16日

概　　要

3次元双曲多様体やHaken多様体などの既約多様体に関連する研究結果について解説する．単体的体積と3次元有界コホモロジー，3次元多様体間の正次数写像，Thurstonの第8問題の解決等が中心的な話題である．

講演者が3次元多様体の研究を始めた時期は，ちょうどW. Thurstonの有名な講義録 "The geometry and topology of 3-manifolds" [41]が広まっていった時期と一致する．この講義録に影響を受け，結び目の単体的体積に関する研究を行い，初めて論文(Soma [27])を発表したのは1981年である．この論文の内容は，かなり初歩的なものである．しかしそれが，研究の方向を決定付けたことは間違いない．それ以後，幾何的手法を利用した3次元多様体の研究と深く係わることになった．

1982年に，24の問題からなるThurstonの問題集 [42]が出版され，その後の3次元双曲幾何・トポロジーさらには複素関数論の研究に指針を与えることになった．現在では，具体的な問題（予想）の多くは肯定的に解決しており，Thurstonの予見の正確さに驚かされる．詳細は，Otal [23]の解説を参照せよ．特に重要なのは，幾何化予想とよばれる第1問題である．この予想を解決したのは，G. Perelmanである．特に，向き付け可能な3次元閉多様体は，双曲多様体，Seifert多様体とそれらのバイブリッドであるHaken多様体からなることが分かった（図1.1参照）．3次元多様体論における最も有名な未解決問題であったPoincaré予想もこれで解決した．3次元幾何多様体（またはHaken多様体）に対して得られていた講演者の結果も，自動的に一般の既約な多様体に対して成り立つ結果となった．

本講演は，講演者の研究と関連するテーマのみ扱っており，これが幾何的3次元多様体論の主流というわけではない．その他の話題に関しては，作間 [25]を参照してほしい．

1. 3次元多様体と「体積」

1.1. 既約多様体のトーラス分解

以下では，3次元多様体はつねに連結かつ向き付け可能と仮定する．3次元多様体Mに埋め込まれた任意の2次元球面が，M内の3次元球体の境界になるとき，Mは**既約**であるという．既約閉多様体と$S^2 \times S^1$が3次元閉多様体の「素因子」である．コンパクト・既約な3次元多様体Mは，固有に埋め込まれた非圧縮曲面を含むとき，**Haken多様体**とよばれる．Jaco-Shalen-Johannson分解定理より，Haken閉多様体は，アンビエント・アイソトピーを除いて一意的に決まるトーラス分解をもつ．この分割により，

本研究は科学研究費 (課題番号: 26400093) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 57M50, 57M99, 30F40
キーワード：3次元多様体，双曲幾何学，単体的体積，有界コホモロジー，Klein群，幾何的極限
* 〒192-0397 東京都八王子市南大沢1-1　首都大学東京 大学院理工学研究科
e-mail: tsoma@tmu.ac.jp
web: http://www.comp.tmu.ac.jp/trhksoma/

Seifert 多様体 $S_1, \ldots, S_n$ と，それ以外の（互いに疎な）コンパクト多様体 $H_1, \ldots, H_m$ が得られる．さらに，Thurston の一意化定理より，各 H_i の内部 $\mathrm{Int} H_i$ は完備有限体積の双曲構造をもつことが証明された．

$$\mathcal{H}(M) = H_1 \sqcup \cdots \sqcup H_m, \quad \mathcal{S}(M) = S_1 \cup \cdots \cup S_n \tag{1.1}$$

とおき，それぞれ M の**双曲部分**，**Seifert 部分**という．Perelman の幾何化定理により，Haken 多様体以外の既約閉多様体 M は，双曲多様体であるか Seifert 多様体である．前者の場合は $M = \mathcal{H}(M)$, 後者の場合は $M = \mathcal{S}(M)$ と考える．

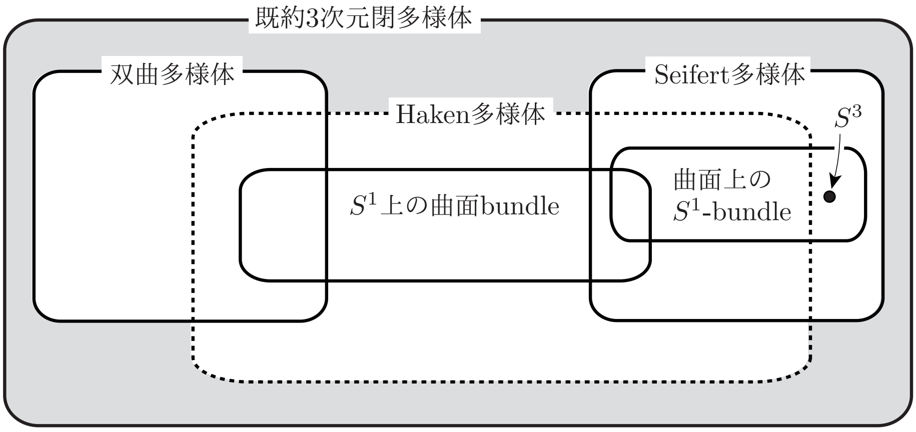

図 1.1　幾何化定理とは,「結局グレー領域は空集合であった」という主張である．

1.2. Gromov ノルムと単体的体積

X を位相空間とし，$(C_*(X), \partial_*)$ を実係数の特異鎖複体とする．k-鎖 $c = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i \in C_k(X)$ の **Gromov ノルム**は，$\|c\| = \sum_{i=1}^n |a_i|$ で定義される．k 次元ホモロジー群 $H_k(X; \mathbb{R})$ の要素 α の（擬）ノルムを，

$$\|\alpha\| = \inf\bigl\{\|c\| \,;\, c \in Z_k(X) := \mathrm{Ker}(\partial_k) \text{ with } [c] = \alpha\bigr\}$$

で定義する．M が向き付け可能な n 次元閉多様体のとき，基本ホモロジー類 $[M] \in H_n(M; \mathbb{R})$ のノルム $\|[M]\|$ を，M の**単体的体積** (simplicial volume) といい，これを $\|M\|$ とあらわす．

以下では，3 次元多様体の場合のみを考える．このとき，閉多様体だけでなく境界成分が全てトーラスであるようなコンパクト多様体に関しても，単体的体積が同様に定義できる．Seifert 多様体 S の単体的体積はつねに $\|S\| = 0$ であることを示すのはそれほど難しくはない．次の定義は，単体的体積を考える上で基本的である．

定理 1.1 (Thurston [41, Theorem 6.2]). M を 3 次元双曲閉多様体とするとき，等式

$$\|M\| = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\boldsymbol{v}_3}$$

が成り立つ．ただし，$\boldsymbol{v}_3 = 1.014916\ldots$ は理想双曲正 3-単体の体積とする．

任意の特異 k-単体 $\sigma : \Delta^k \longrightarrow M$ に対し，$\mathrm{straight}(\sigma) : \Delta^k \longrightarrow M$ は Δ^k の頂点を動かさず σ にホモトピックな可微分写像で，その $\mathbb{H}^3$ へのリフトが双曲 k-単体の(自然な）パ

ラメータ写像となっているものとする（図1.2参照）．$c = \sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i$ を M の基本類 $[M]$ を代表する3-サイクルとする．このとき $\mathrm{straight}(c) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{straight}(\sigma_i)$ も $[M]$ を代表する3-サイクルであり，$\|\mathrm{straight}(c)\| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i| = \|c\|$ をみたす．このサイクルを利用して，$\|M\| \ge \dfrac{\mathrm{Vol}(M)}{\boldsymbol{v}_3}$ が証明できる．逆向きの不等式の証明はずっと難しい（相馬 [40, 第2.5節] の解説をみよ）．さらに，M が既約閉多様体のときは，トーラス分解 (1.1) に対し，次の Cutting-off 定理（Gromov [5, 第4.2節], Soma [27]）が成り立つ．

$$\|M\| = \|H_1\| + \cdots + \|H_m\| = \frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{Int}H_1)}{\boldsymbol{v}_3} + \cdots + \frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{Int}H_m)}{\boldsymbol{v}_3} \tag{1.2}$$

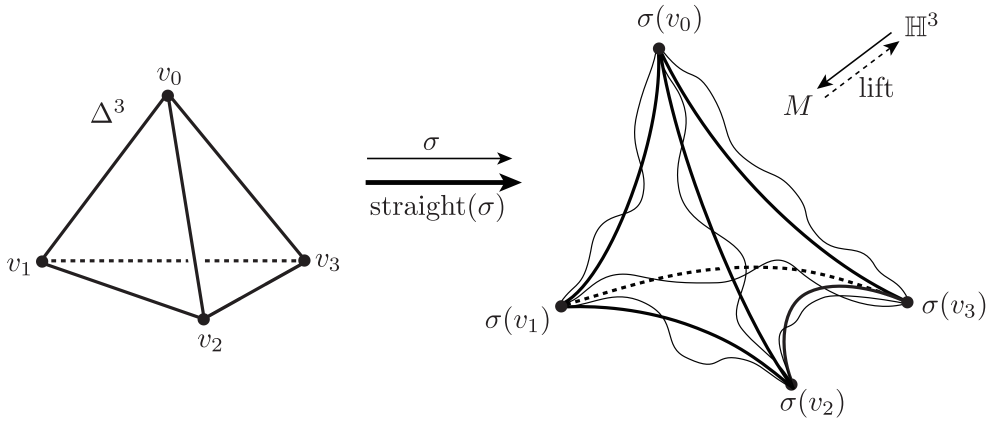

図 1.2　$k = 3$ の場合

1.3. 単体的体積と剛性定理

Mostow の剛性定理とは,「3次元以上の双曲閉多様体の幾何構造は，多様体のホモトピー型で決定される」という主張である．この定理にはいろいろな証明法や一般化がある．Thurston の証明は，単体的体積を使用したものである．

定理 1.2 (Thurston [41], Mostow-Gromov-Thurston の剛性定理). $f : M \longrightarrow N$ を3次元双曲閉多様体間の正次数写像とする．このとき，f が $\deg(f)$-重の局所等長的被覆射影にホモトピックであるための必要十分条件は，$\mathrm{Vol}(M) = \deg(f)\mathrm{Vol}(N)$ である．

(1.1), (1.2) より，定理1.2を既約な3次元閉多様体の場合に一般化することが可能であると推測できる．

定理 1.3 (Soma [28], 既約閉多様体に対する剛性定理). $f : M \longrightarrow N$ を既約な3次元閉多様体間の正次数写像とする．このとき，$g \simeq f$, $g(\mathcal{H}(M)) = \mathcal{H}(N)$, 制限写像 $g|_{\mathcal{H}(M)} : \mathcal{H}(M) \longrightarrow \mathcal{H}(N)$ は $\deg(f)$-重 被覆射影，をみたす連続写像 $g : M \longrightarrow N$ が存在するための必要十分条件は，$\|M\| = \deg(f)\|N\|$ である．

実際，この定理を証明するには，等式 $\|M\| = \deg(f)\|N\|$ が成り立つとき，f がトーラス分解を保存することを示す必要がある．しかし，f が π_1-単射という仮定がないので，自明な事実ではない．

1.4. 閉曲面の3次元有界コホモロジー

擬ノルム空間 $(H_*(X;\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ の双対概念である有界コホモロジーを定義する．$C^k(X)$ を実係数の k-双対鎖複体とする．$C^k(X)$ の要素 c で，

$$\|c\| = \sup\bigl\{|c(\sigma)|\,;\,\sigma : \Delta^k \longrightarrow X \text{ is a singular } k\text{-simplex}\bigr\} < \infty$$

をみたすもの全体からなる $\mathbb{R}$-部分空間を $C_b^k(X)$ とする．$C^k(X)$ 上の双対境界作用素 δ^k の制限作用素 $\delta_b^k := \delta^k|_{C_b^k(X)} : C_b^k(X) \longrightarrow C_b^{k+1}(X)$ が定義できる．このとき，双対鎖複体 $(C_b^*(X), \delta_b^*)$ の定義するコホモロジー

$$H_b^k(X;\mathbb{R}) = Z_b^k(X)/B_b^k(X) \quad \bigl(Z_b^k(X) = \mathrm{Ker}(\delta_b^k),\ B_b^k(X) = \mathrm{Im}(\delta_b^{k-1})\bigr)$$

を，X の**有界コホモロジー** (bounded cohomology) という．$\alpha \in H_b^k(X;\mathbb{R})$ の擬ノルム $\|\alpha\|$ を，

$$\|\alpha\| = \inf\bigl\{\|c\|\,;\, c \in Z_b^k(X) \text{ with } [c] = \alpha\bigr\}$$

で定義する．

この擬ノルムがノルムかという基本的な問題は，Gromov [5, p. 38] 他より提起された．Matsumoto-Morita [17, Theorem 2.5] より，$H_b^{k+1}(X;\mathbb{R})$ 上の擬ノルム $\|\cdot\|$ が，ノルムであるための必要十分条件は，鎖複体 $(C_*(X), \partial_*)$ が k 次一様境界条件をみたすことである．実際，彼らはこの結果を使って，$k < 3$ のとき，$H_b^k(X;\mathbb{R})$ の擬ノルムは必ずノルムになることを示した．一方，Soma [32] では，$(C_*(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}), \partial_*)$ が2次一様境界条件をみたさないことを証明することにより，$H_b^3(\mathbb{Z} * \mathbb{Z};\mathbb{R})$ の擬ノルムがノルムはならないことを示した．これは，3次元幾何とは無関係な結果にみえるが，証明では，8の字結び目の補空間が完備な3次元双曲構造をもつことを利用する．

したがって，$k \geq 3$ のとき，零ノルム空間 $N^k(X) = \{\alpha \in H_b^k(X;\mathbb{R})\,;\,\|\alpha\| = 0\}$ が一般には零空間ではないことがわかった．ただし，Matsumoto-Morita の定理は，Hahn-Banach の定理に依っているので，$N^k(X)$ の要素が具体的に与えられた訳ではない．これは，別の方法で解決できた．

定理 1.4 (Soma [31])**.** Σ_g を種数 $g > 1$ の閉曲面 Σ_g とする．このとき，$N^3(\Sigma_g)$ の要素 $[c_r]$ $(0 < r \leq 1)$ で，$H_b^3(\Sigma_g;\mathbb{R})$ において線形1次独立なものが具体的に構成できる．特に，零ノルム空間 $N^3(\Sigma_g)$ は連続濃度次元を持つ（巨大な）ベクトル空間である．

Yoshida [44] により，$H_b^3(\Sigma_g;\mathbb{R})$ は無限次元であることは知られていたが，定理1.4の系として，$H_b^3(\Sigma_g;\mathbb{R})$ は連続濃度次元であることがわかった．さらに，Soma [30] では，（商）Banach 空間 $\widehat{H}_b^3(\Sigma_g;\mathbb{R}) = H_b^3(\Sigma_g;\mathbb{R})/N^3(\Sigma_g)$ も連続濃度次元であることが証明されている．

1.5. Klein 曲面群の剛性定理と有界コホモロジー

$PSL_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の離散部分群を **Klein 群**という．我々は，有限位数の要素をもたない Klein 群 Γ のみを考える．このとき，$M_\Gamma = \mathbb{H}^3/\Gamma$ は3次元双曲多様体であり，自然な等化写像 $p : \mathbb{H}^3 \longrightarrow M_\Gamma$ は局所等長的な普遍被覆である．この節では，Γ はつねに有限生成の場合を考える．M_Γ が有限体積の凸コアをもつとき，Γ を**幾何的有限 Klein 群**といい，そうでないときは**幾何的無限 Klein 群**という．M_Γ 上の3-コサイクルを，任意の特異3-単体 $\sigma : \Delta^3 \longrightarrow M_\Gamma$ に対して，

$$\omega_\Gamma(\sigma) = \int_{\Delta^3} \mathrm{straight}(\sigma)^*(\Omega_\Gamma)$$

で定義する．ただし，Ω_Γ は M_Γ 上の体積要素である．M_Γ 内の双曲 3-単体の体積は $\mathbb{H}^3$ 内の理想正 3-単体の体積 $\boldsymbol{v}_3$ より小さいので，$|\omega_\Gamma(\sigma)| < \boldsymbol{v}_3$ が成り立つ．よって，ω_Γ は $H_b(M_\Gamma; \mathbb{R})$ の要素 $[\omega_\Gamma]$ を代表する．$[\omega_\Gamma]$ を M_Γ の**基本有界コホモロジー類**という．明らかに，その擬ノルムは $\|[\omega_\Gamma]\| \le \|\omega_\Gamma\| = \boldsymbol{v}_3$ をみたす．

定理 1.5 (Soma [29], 基本有界コホモロジー類による Klein 群の特徴付け)**.** Γ を有限生成 Klein 群とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(1) $[\omega_\Gamma] \neq 0$ in $H_b^3(M_\Gamma; \mathbb{R})$.

(2) $\|[\omega_\Gamma]\| = \boldsymbol{v}_3$.

(3) Γ が幾何的無限であるか，または M_Γ が有限体積である．

注意 1.6. 実際には，[29] において定理 1.5 は，Γ が位相的 tame Klein 群という仮定のもとで証明されている．しかしその後,「有限生成 Klein 群は位相的に tame である」という Marden の予想（Thurston の第 9 問題）が，Agol [1] と Calegari-Gabai [4] によって，独立に証明されたので，この仮定は除外できた．Marden の予想の短い証明は，Soma [38] にある．

Γ が $\pi_1(\Sigma_g)$ $(g > 1)$ に同型であるとき，**（$\boldsymbol{\pi_1(\Sigma_g)}$ 型）Klein 曲面群**という．$\pi_1(\Sigma_g)$ 型 Klein 曲面群の “Teichmüller 空間” $\mathcal{T}^{(3)}(\Sigma_g)$ を考える．ホモトピー同値写像 $f : \Sigma_g \longrightarrow M_\Gamma$ を許すような 3 次元双曲多様体 M_Γ は $\Sigma_g \times \mathbb{R}$ に同相である．このような対 (M_Γ, f), $(M_{\Gamma'}, f')$ が同値であるとは，$\alpha \circ f \simeq f'$ をみたす向きを保存する等長写像 $\alpha : M_\Gamma \longrightarrow M_{\Gamma'}$ が存在することをいう．同値類全体の集合を $\mathcal{T}^{(3)}(\Sigma_g)$ とおく．

(M_Γ, f), $(M_{\Gamma'}, f')$ を $\mathcal{T}^{(3)}(\Sigma_g)$ の完全 2 重退化要素とする．[30] では，$f^*([\omega_\Gamma]) = f'^*([\omega_{\Gamma'}])$ in $H_b^3(\Sigma, \mathbb{R})$ であるとき，M_Γ と $M_{\Gamma'}$ は同じエンディング・ラミネーションを持つことを示した．一方，Minsky 他 [19, 3] によって証明されたエンディング・ラミネーション定理［EL 定理］（Thurston の第 11 問題）により，M_Γ と $M_{\Gamma'}$ の間にはマーキングを保存する等長写像が存在することがわかった．よって次が成り立つ．

定理 1.7 (Soma [30], Klein 曲面群の剛性定理)**.** (M_Γ, f), $(M_{\Gamma'}, f')$ を $\mathcal{T}^{(3)}(\Sigma_g)$ の完全 2 重退化要素とする．このとき，$(M_\Gamma, f) = (M_{\Gamma'}, f')$ in $\mathcal{T}^{(3)}(\Sigma_g)$ であるための必要十分条件は，$f^*([\omega_\Gamma]) = f'^*([\omega_{\Gamma'}])$ in $H_b^3(\Sigma_g, \mathbb{R})$ が成り立つことである．

注意 1.8. 実際 [30] では，単射半径の下限が正の M_Γ, $M_{\Gamma'}$ のみが剛性定理の対象であった．それは，この論文が発表された時点では，このような多様体に対してのみ EL 定理が証明されていたからである．一般の EL 定理が発表されたのは，それから 10 年以上後のことである．しかし，講演者は EL 定理に従属しなくても定理 1.7 が直接証明できるのではないかと考えている．

2. 既約な 3 次元多様体間の正次数写像

講演者が関心を持つ前から 3 次元多様体間の次数 1 または正次数の写像の研究は始まっていた．具体的な研究目標は，Y. Rong によって提案された Kirby の問題集 [14] の問題 3.100 (A), (B) である．$\deg(f) > 0$ の写像 $f : M \longrightarrow N$ が存在するとき，N は M によって，**$\boldsymbol{\deg(f)}$-支配される**または単に**支配される**という．ここで，M は任意の閉多様体とする．

(A) M に 1-支配される既約な 3 次元閉多様体は（位相同型を除いて）有限個であるか.

(B) 次の性質をみたすような定数$n(M) \in \mathbb{N}$は存在するか．
Mを起点とする任意の次数1写像の列：$M \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$ を考える．ただし，M_j $(j = 1, \ldots, n)$は既約であるとする．もし$n \geq n(M)$であれば，f_iの中の少なくとも1つはホモトピー同値写像である．

3次元多様体の基本群の特性より，(A) $\Rightarrow$ (B)が示せる．正次数写像の研究は「up to 双曲部分」の形で進んでいた．その状況を変えたのは次の定理である．

定理 2.1 (Soma [33, 34])**.** Mを任意の3次元閉多様体とする．このとき，Mによって支配される既約閉多様体Nの双曲部分$\mathcal{H}(N)$の位相型はたかだか有限個である．

この証明では，Thurson [43] の議論を応用する．3次元閉多様体Mから双曲多様体への正次数写像$f : M \longrightarrow N$が与えられたとする．Mの単体分割τを固定しておく．各3-単体$\Delta \in \tau^{(3)}$に対し，N内の双曲3-単体 straight$(f \circ \mathrm{inc}_\Delta)$を考える．$M$上には，straight$(f \circ \mathrm{inc}_\Delta)$ $(\Delta \in \tau^{(3)})$を経由し，Nから誘導される仮想双曲構造が定義できる．このとき，[43]と同様な議論により，Mの「双曲構造」の有界性が示せる．それを利用して，Mに支配される双曲多様体の個数の有限性が証明できた．

定理2.1とRong [24]の結果を合わせることにより次が得られた．

系 2.2 (Soma [34])**.** 問題(B)は正しい．

注意 2.3. 2012年にLiu [15]が，M. Boileau, S. Wang等の一連の結果を利用して，問題(A)を最終的に解決した．

3. 3次元幾何多様体の微分同相群

3.1. 3次元トポロジー的観点からの最小面積曲面

最小面積曲面の3次元多様体論への応用は，1980年のMeeks-Yauによる一連の研究から始まった．特に，Freedman, Hass, Scottの論文 [6] は，この理論の発展期を支えた．Gabai [7]が,「無限面積の」最小面積曲面を3次元双曲多様体の位相的剛性定理の証明に使用したのを契機に，転換期に入った．最小面積曲面は安定な極小曲面であるが，3次元多様体論で必要とされるのは主に最小面積曲面であり，安定な極小曲面というだけでは不十分な場合が多い．

Gabaiは剛性定理を証明するため，3次元双曲空間$\mathbb{H}^3$上のコ・コンパクトなRiemann計量μ（負曲率とは限らない）と$\mathbb{H}^3$の無限遠球面S^2_∞上の滑らかな単純閉曲線λを考えた．Gabaiは，λを境界にもちμ-最小面積平面からなる$\mathbb{H}^3$内のD^2-極限ラミネーションの存在を証明した．しかし，D^2-極限ラミネーションは非常に扱いにくく，それが論文 [7] の後半部分を難しくしている．その困難を解消するため，Gabaiは固有に埋め込まれたμ-最小面積平面が存在するかという問題を提起した．

定理 3.1 (Soma [35, 36]，固有最小面積平面の存在問題 (Gabai [7, 予想3.12]) の解決)**.** Xをコ・コンパクトなRiemann計量μをもつ3次元Gromov双曲空間とする．このとき，∂X上の任意のJordan曲線は，X内に固有に埋め込まれたのμ-最小面積平面の境界となる．

3.2. 既約3次元多様体の微分同相群のホモトピー型

Mを既約な3次元閉多様体とする．Diff(M)をMに関するC^∞級の微分同相群とし，Diff$_0(M)$を恒等写像Id$_M$を含む連結成分とする．Diff$_0(M)$のホモトピー型について考

える．M が Haken 多様体とのき，この問題は，Hatcher [9], Ivanov [12] によって解決されている．特に，Haken 多様体 M が S^1-作用をもたないとき，$\mathrm{Diff}_0(M)$ は可縮である．そこで，M が非 Haken 多様体の場合を考える．幾何化定理により，M は幾何構造をもつ．このとき，M の自己等長写像全体からなる $\mathrm{Diff}(M)$ の部分空間を $\mathrm{Isom}(M)$ とし，Id_M を含む連結成分を $\mathrm{Isom}_0(M)$ とする．このとき，次の予想がある．

予想 3.2 (一般 Smale 予想)．M を 3 次元幾何閉多様体とする．このとき，包含写像 $i_0 : \mathrm{Isom}_0(M) \longrightarrow \mathrm{Diff}_0(M)$ はホモトピー同値写像である．

この予想は，M が楕円型のときと非楕円型の場合に分けて研究されている．M が 3 次元球面 S^3 のときが，オリジナルの Smale 予想であり，これは Hatcher [10] によって解決された．特に，$\mathrm{Diff}_0(S^3)$ は $SO(4)$ にホモトピー同値である．それ以外の楕円型幾何多様体の場合，Hong 他 [11] によって，部分解が得られているが，まだ完全ではない．非楕円・非 Haken 型幾何多様体は，双曲多様体，$\widetilde{SL}_2$-多様体，infranil 多様体のいずれかである．M が双曲多様体のときは，Gabai [8] は $\mathrm{Diff}_0(M)$ が可縮であることを証明した．特に，$i_0 : \mathrm{Isom}_0(M) \longrightarrow \mathrm{Diff}_0(M)$ はホモトピー同値写像である．

定理 3.3 (McCullough-Soma [18], $\widetilde{SL}_2$-多様体に関する Smale 予想の解決)．3 次元閉多様体 M が $\widetilde{SL}_2$-構造をもつとする．$\pi_1(M)$ の中心 Z_M が自明であるとき，$\mathrm{Diff}_0(M)$ は可縮であり，Z_M が無限巡回群のとき，$\mathrm{Diff}_0(M)$ は S^1 にホモトピー同値である．特に，$i_0 : \mathrm{Isom}_0(M) \longrightarrow \mathrm{Diff}_0(M)$ はホモトピー同値写像である．

注意 3.4. (1) $p : X \longrightarrow \mathbb{H}^2$ を S^1-バンドルとし，X は，p が擬等長的になるようなコ・コンパクト Riemann 計量をもつとする．また，l を $\mathbb{H}^2$ 内の任意の測地線とする．X に固有に埋め込まれた最小面積開アニュラスで，$p^{-1}(l)$ の有界近傍に含まれるものが存在することは，定理 3.1 の証明と同様の議論によって示すことができる．講演者は，この結果を利用して，$\widetilde{SL}_2$-多様体に対する位相的剛性定理を証明した (Soma [37])．この剛性定理は，Scott [26] によって既に証明されていたが，[37] の議論により証明は統一化・簡易化された．一方，Gabai は彼自身の議論を応用して双曲多様体に関する Smale 予想を解決した．$\widetilde{SL}_2$-多様体の場合も，[37] の議論を使って Smale 予想が証明できるという発想に至るべきであった．しかし，D. McCullough 氏に指摘されるまでの数年間，まったく気がつかなかった．

(2) 非楕円型幾何多様体で，Smale 予想が未解決なのは infra-nil 多様体のみになった．講演者は，この場合の証明はさほど難しくないと楽観視していたが，双曲幾何的手法が使えないこともあり，未だに証明できていない．

4. Klein 曲面群の幾何的極限の分類定理

次の問いが，Thurston [42] の第 8 問題である．

Analyze limits of quasi-Fuchsian groups with accidental parabolics.

「Analyze $\cdots$」という質問は抽象的であり，どこまで明らかにしたらよいかはっきりしない．しかし，Otal [23] により，大鹿健一氏と講演者の共同研究 [22] が最終的な解決と認定された．本節の結果は，連結な有限型曲面で Euler 標数が負のものならば，つねに成り立つが，簡単のため種数 $g > 1$ の閉曲面 Σ_g の場合のみ考える．また，扱う用語・概念はかなり複雑なので，講演録では省略した．論文 [22] を参照するか，相馬 [39] の解説をみてほしい．

主結果は，$\pi_1(\Sigma_g)$ 型Klein群（特に擬Fuchs群）の列 Γ_n $(n=1,2,\dots)$ に対する幾何的極限 G の完全な分類である．$\mathbb{H}^3/\Gamma_n$ はすべて $\Sigma_g\times(0,1)$ に同相であるが，$\mathbb{H}^3/G$ がそうであるとは限らない．このような現象は，G が**偶発的放物型要素** (accidental parabolic) を含むときに起こる．代表的な例としては，Kerckhoff-Thurston [13], Brock [2] がある．幾何的極限多様体の形としては，これらの例を有限個または無限個組み合わせたもの以外は想像しにくいかもしれない．しかし，実際には，より複雑な例が数多く存在する．以下，幾何的極限多様体 $\mathbb{H}^3/G$ を N_G とおき，N_G の非カスプ部分 (non-cuspidal part) を $N_G^{\mathrm{n.c.}}$ とおく．

定理 4.1 (Ohshika-Soma [22, Theorem A]，幾何的極限であるための必要条件)．
Γ_n $(n=1,2,\dots)$ を $\pi_1(\Sigma_g)$ 型Klein曲面群の列であり，非初等的なKlein群 G に幾何的に収束すると仮定する．このとき，ラベル付きブリック多様体 M で，$N_G^{\mathrm{n.c.}}$ に双Lipschitz同相であり，かつ次の条件をみたすものが存在する．

(i) ∂M の各成分はトーラスであるかまたは開アニュラスである．

(ii) M に固有に埋め込まれた非圧縮アニュラスで，∂M の異なる成分をつなぐものは存在しない．

(iii) $A=S^1\times[0,\infty)$ を，M に埋め込まれた非圧縮半開アニュラスで，$S^1\times\{t\}$ $(t\to\infty)$ が M のwildエンド e に向かうものとする．このとき，A のコアは M 内のホモトピーで，e に向かう ∂M のある成分上に移動できる．

(iv) M は，各ブリックの直積構造を保つように $\Sigma_g\times(0,1)$ に埋め込むことができる．このとき，M の幾何的有限エンドは $\Sigma_g\times\{0,1\}$ に含まれるようにできる．

注意 4.2. (1) $\mathbb{H}^3/\Gamma_n$ $(n=1,2,\dots)$ はすべて $\Sigma_g\times(0,1)$ と同相である．したがって，その幾何的極限である N_G が $\Sigma_g\times(0,1)$ に位相的に埋め込めるという定理4.1 (iv) の主張は自明にみえる．しかし，実際にこれを証明するのは簡単ではない．

(2) M が2重に退化している $F\times\mathbb{R}$ $(=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}F\times[n,n+1])$ 型ブリック多様体の場合，双曲幾何の一般論より次がいえる．

(v) M の両側のエンディング・ラミネーションは M 内で平行ではない．

定理 4.3 ([22, Theorem C]，幾何的極限であるための十分条件)．M を定理4.1の条件 (i)－(iv)，注意4.2 (2) の場合はそれに加えて条件 (v)，をみたすラベル付きブリック多様体とする．このとき，$\pi_1(\Sigma_g)$ 型 擬Fuchs群の幾何的極限 G で，次の性質 (*) をみたすものが存在する．

(*) 等角な拡張写像 $f_{\partial_\infty}:\partial_\infty M\longrightarrow\partial_\infty N_G$ をもつ双Lipschitz同相写像 $f:M\longrightarrow N_G^{\mathrm{n.c.}}$ が定義できる．ただし，$\partial_\infty M$, $\partial_\infty N_G$ は M, N_G の無限遠境界をあらわす．

注意 4.4. 条件 (i)–(iv) をみたすラベル付きブリック多様体のいろいろな例を，機械的に構成することができる．ある例と定理4.3より，擬Fuchs群の幾何的極限多様体 N_G で，無限個の位相的tameエンドと無限個のwildエンドの両方を同時に持つものが存在することもわかる．これは，N_G に幾何的に収束する擬Fuchs多様体 $\mathbb{H}^3/\Gamma_n$ のすべてが，2つの位相的tameエンドしか持たないのとは対照的である．

定理 4.5 ([22, Theorem D]，幾何的極限に関する剛性定理)．G_1, G_2 はいずれも $\pi_1(\Sigma_g)$ 型Klein曲面群の非初等的な幾何的極限とする．もし $f:N_{G_1}\longrightarrow N_{G_2}$ がエンド不変量を保存する同相写像であるならば，f は等長写像に固有ホモトピックである．

注意 4.6. (1) N_{G_i} $(i=1,2)$ のエンド不変量は，位相的 tame エンドに対してのみ定義される．Wild エンドに関しては，不変量は定義されていない．

(2) 定理 4.1 と定理 4.3 より，与えられた Klein 群 G が，$\pi_1(\Sigma_g)$ 型 Klein 曲面群（特に擬 Fuchs 群）の幾何的極限となるための必要十分条件がわかった．さらに定理4.5 より，幾何的極限多様体の等長類が完全に分類できることが証明できた．この分類定理の応用例は，Ohshika [20, 21] 等をみよ．

注意 4.7. [22] の証明はかなり複雑である．これは，Minsky 他による EL 定理の後半部分 [3] の議論を基にしていることに起因している．EL 定理の主要部分は，Masur-Minsky [16] と Minsky [19] であり，そこでは高度に非自明な事実である「曲線複体の双曲性」と「Lipschitz モデル定理」が証明されている．一方，[3] は長い論文であるが，主結果の「双 Lipschitz モデル定理」は想定内のものであり,（特に Klein 曲面群の場合は）もっと簡単に証明できるように思える．

参考文献

[1] I. Agol, Tameness of hyperbolic 3-manifolds, arXiv: math.DG/0405568.

[2] J. Brock, Iteration of mapping classes and limits of hyperbolic 3-manifolds, Invent. Math. **143** (2001) 523–570.

[3] J. Brock, R. Canary and Y. Minsky, The classification of Kleinian surface groups, II: The Ending Lamination Conjecture, Ann. of Math. (2) **176** (2012) 1–149.

[4] D. Calegari and D. Gabai, Shrinkwrapping and the taming of hyperbolic 3-manifolds, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006) 385–446.

[5] M. Gromov, Volume and bounded cohomology, Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. **56** (1982), 5–100.

[6] M. Freedman, J. Hass and P. Scott, Least area incompressible surfaces in 3-manifolds, Invent. Math. **71** (1983) 609–642.

[7] D. Gabai, On the geometric and topological rigidity of hyperbolic 3-manifolds, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997) 37–74.

[8] D. Gabai, The Smale conjecture for hyperbolic 3-manifolds: $\mathrm{Isom}(M^3) \simeq \mathrm{Diff}(M^3)$, J. Differential Geom. **58** (2001) 113–149.

[9] A. Hatcher, Homeomorphisms of sufficiently large P^2-irreducible 3-manifolds, Topology **15** (1976) 343–347.

[10] A. Hatcher, A proof of the Smale conjecture, $\mathrm{Diff}(S^3) \simeq O(4)$, Ann. of Math. **117** (1983) 553–607.

[11] S. Hong, J. Kalliongis, D. McCullough and J.H. Rubinstein, Diffeomorphisms of elliptic 3-manifolds, Lecture Notes in Math. **2055**, Springer, Berlin, 2012.

[12] N. Ivanov, Diffeomorphism groups of Waldhausen manifolds, J. Soviet Math. **12** (1979) 115–118.

[13] S. Kerckhoff and W. Thurston, Non-continuity of the action of the modular group at Bers' boundary of Teichmüller space, Invent. Math. **100** (1990) 25–47.

[14] R. Kirby, Problems in low-dimensional topology, Geometric Topology (W.H. Kazez ed.), AMS/IP Studies in Advanced Mathematics vol. 2, Part 2, Amer. Math. Soc. and International Press, 1997, pp. 35–473.

[15] Y. Liu, Nonzero degree maps between three-manifolds, Thesis (Ph.D.) – Univ. of California Berkeley, 2012.

[16] H. Masur and Y. Minsky, Geometry of the complex of curves, I: Hyperbolicity, Invent. Math. **138** (1999) 103–149.

[17] S. Matsumoto and S. Morita, Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985) 539–544.

[18] D. McCullough and T. Soma, The Smale conjecture for Seifert fibered spaces with hyperbolic base orbifold, J. Differential Geom. **93** (2013) 327–353.

[19] Y. Minsky, The classification of Kleinian surface groups I: models and bounds, Ann. of Math. **171** (2010) 1–107.

[20] K. Ohshika, Divergence, exotic convergence and self-bumping in quasi-Fuchsian spaces, arXiv: 1010.0070 v3.

[21] K. Ohshika, Reduced Bers boundaries of Teichmüller spaces, Ann. Inst. Fourier **64** (2014) 145–176.

[22] K. Ohshika and T. Soma, Geometry and topology of geometric limits I, arXiv: 1002.4266 v2.

[23] J.-P. Otal, (Classics revisited) William P. Thurston: "Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry" Bull. Am. Math. Soc., New Ser. 6, 357–379 (1982), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **116** (2014) 3–20.

[24] Y. Rong, Degree one maps between geometric 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. **322** (1992) 411–436.

[25] 作間 誠，結び目と 3 次元多様体 — 幾何構造とファイバー構造を中心にして — , 第 63 回トポロジーシンポジウム（企画講演）アブストラクト (2016).

[26] P. Scott, There are no fake Seifert fibre spaces with infinite π_1, Ann. of Math. **117** (1983) 35–70.

[27] T. Soma, The Gromov invariant of links, Invent. Math. **64** (1981) 445–454.

[28] T. Soma, A rigidity theorem for Haken manifolds, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **118** (1995) 141–160.

[29] T. Soma, Bounded cohomology and topologically tame Kleinian groups, Duke Math. J. **88** (1997) 357–370.

[30] T. Soma, Bounded cohomology of closed surfaces, Topology **36** (1997) 1221–1246.

[31] T. Soma, The zero-norm subspace of bounded cohomology, Comment. Math. Helv. **72** (1997) 582–592.

[32] T. Soma, Existence of non-Banach bounded cohomology, Topology **37** (1998) 179–193.

[33] T. Soma, Non-zero degree maps to hyperbolic 3-manifolds, J. Differential Geom. **49** (1998) 517–546.

[34] T. Soma, Sequences of degree-one maps between geometric 3-manifolds, Math. Annalen **316** (2000) 733–742.

[35] T. Soma, Existence of least area planes in hyperbolic 3-space with co-compact metric, Topology **43** (2004) 705–716.

[36] T. Soma, Least area planes in Gromov hyperbolic 3-spaces with co-compact metric Geom. Dedicata **112** (2005) 123–128.

[37] T. Soma, Scott's rigidity theorem for Seifert fibered spaces; revisited, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006) 4057–4070.

[38] T. Soma, Existence of ruled wrappings in hyperbolic 3-manifolds, Geom. Topol. **10** (2006) 1173–1184.

[39] 相馬輝彦，位相的クライン群論の最近の話題，数学 論説 **62** (1) (2010) 18–39.
Doi: `http://doi.org/10.11429/sugaku.0621018`

[40] 相馬輝彦，双曲幾何学入門，中央大学数学教室講義録 **5** (2011).
On line at `http://ir.c.chuo-u.ac.jp/repository/search/item/md/rsc/p/2249/`

[41] W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Lecture Notes, Princeton

Univ., Princeton (1978).
On line at `http://www.msri.org/publications/books/gt3m/`

[42] W. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982) 357–381.

[43] W. Thurston, Hyperbolic structures on 3-manifolds I: Deformation of acylindrical manifolds, Ann. of Math. **124** (1986) 203–246.

[44] T. Yoshida, On 3-dimensional bounded cohomology of surfaces, Homotopy Theory and Related Topics, Advanced Studies in Pure Math. **9**, Kinokuniya, Tokyo, 1986, pp. 173–176.