§7 ポアンカレ・ベンディクソンの定理

2次元 自励系

$$\frac{du}{dt}(t) = f(u(t))$$

を考える。 $u(0) = x_0$ をみたす解を

$u(t;0,x_0)$ (略 $u(t;x_0)$) と表す。

$\gamma^+(x_0) = \{u(t;0,x_0) \mid t \geq 0\}$.

定理4.2 解軌道 $\gamma^+(x_0)$ が有界で、
$L^+(\gamma^+(x_0))$ が平衡点を含まれないなら、
$L^+(\gamma^+(x_0))$ は周期軌道となる。

系1 解軌道 $\gamma^+(x_0)$ がある有界閉領域
Kに含まれ、Kには平衡点がないとする。
このとき、K内に周期軌道が存在する。

(:) $\gamma^+(x_0) \subset K$ より $L^+(\gamma^+(x_0)) \subset K$.

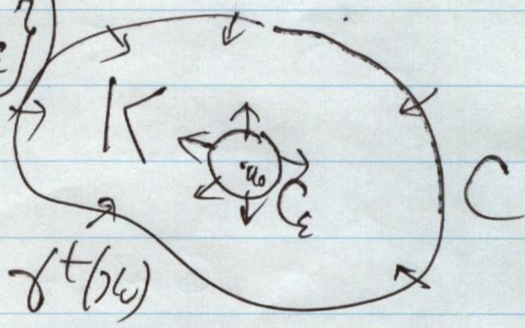
仮定とポアンカレ・ベンディクソンの定理より $L^+(\gamma^+(x_0))$
が周期軌道だから。

系2. 1つの単純閉曲線 C 上で $f(x)$ が外から内に向っているとし、C で囲まれる内部領域 Ω に、ただ1つの平衡点 x^0 があり、十分小さな半径 $\varepsilon>0$ の円周 C_0 上で $f(x)$ が外向きであるとする。

このとき Ω 内に周期軌道が存在する。

(証) $K=\bar{\Omega} \setminus B_\varepsilon(x^0)$,

$B_\varepsilon(x^0)=\{(x,y) \mid \|(x,y)-x^0\|<\varepsilon\}$



とおくと K は有界閉集合で $x^0\in C$ から出発する解軌道 $\gamma^+(x_0)$ は $\gamma^+(x_0)\subset K$ をみたす。

K には平衡点がないので K 内に周期軌道が存在する。

例
$$\begin{cases} x' = x+y-x(x^2+y^2) \\ y' = -x+y-y(x^2+y^2). \end{cases}$$

$V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ とおくと

$$\dot{V}(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt}\left(V(x(t), y(t))\right)$$

$$= x(t)\cdot x'(t) + y(t)y'(t)$$

$$= x\left(x+y-x(x^2+y^2)\right) + y\left(-x+y-y(x^2+y^2)\right)$$

$$= x^2+y^2-(x^2+y^2)^2$$ となる.

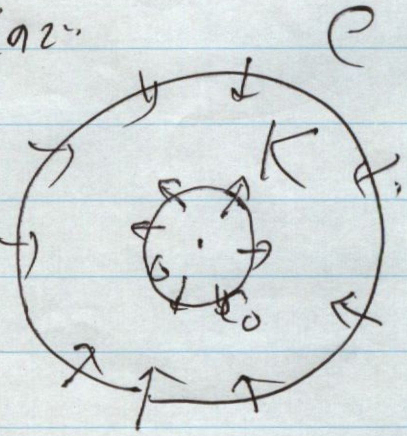
$\therefore$ $C: x^2+y^2=2$ 上で

$$\frac{d}{dt}\left(V(x(t), y(t))\right) < 0.$$

$\therefore$ C 上では 解軌道は

x^2+y^2 を減少させる方向に動くので

C の外から内に向いて動く.



一方 $C_0: x^2+y^2 = \frac{1}{2}$ では

$$\frac{d}{dt}\left(V(x(t), y(t))\right) > 0$$

となるので C_0 の内から外に向いて動く.

$\therefore$ K を C_0 と C とで囲まれる有界閉領域とすると

$x_0 \in K$ から出発する軌道 $\gamma^+(x_0)$ は $\gamma^+(x_0) \subset K$ となる

平衡点をしらべる。

(第1式)×$x=0$ より $x^2+xy-x^2(x^2+y^2)=0$.

(第2式)×$y=0$ より $-xy+y^2-y^2(x^2+y^2)=0$,

辺々たして $(x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2=0$

$\therefore x^2+y^2=0$ or $x^2+y^2=1$.

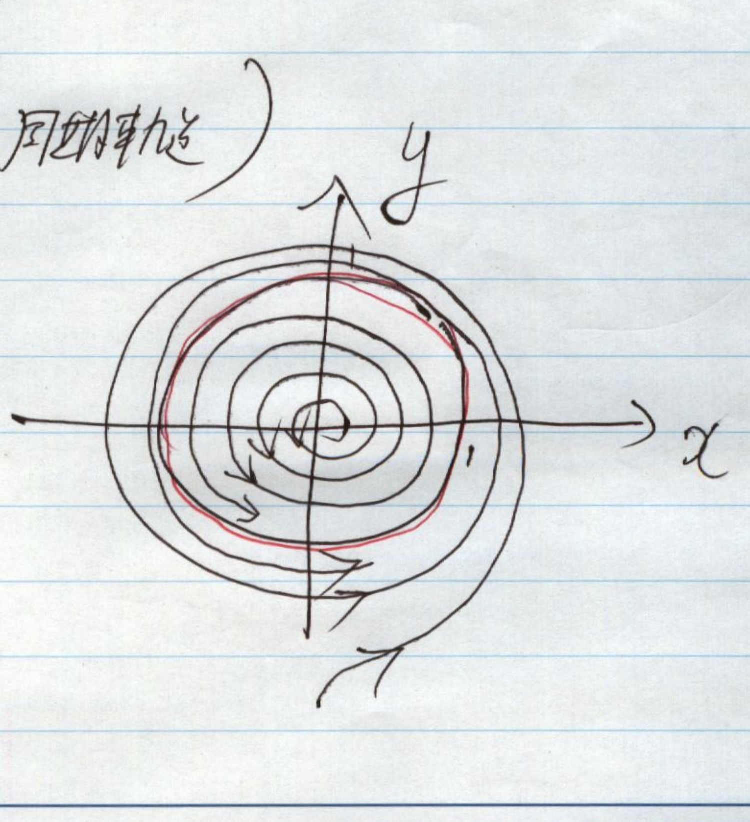
$x^2+y^2=1$のとき、改めて、第1式より $y=0$.

第2式より $x=0$ となるが不適。

$\therefore$ $(0,0)$のみ.

よって、K内に平衡点がないので K内に周期軌道をもつ。

(実は $x^2+y^2=1$ が周期軌道)



㊟ 補足

周期軌道がないことを保証する条件もある。

定理 4.3 単連結領域 Ω で C^1-級関数 $f(x,y), g(x,y)$ が $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0 \quad (\forall (x,y) \in \Omega)$

をみたすならば

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

は Ω 内に周期軌道をもたない。

∵) もし周期軌道 $\gamma : x = x(t), y = y(t) \subset \Omega$ $(0 \le t \le T)$

があったとすると

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} f dy - g dx$$

$$= \int_0^T x' y' dt - \int_0^T y' x' dt = 0.$$

となるが、仮定より（左辺）は正又は負となり 0 になりえない。∴ 矛盾。 $\square$

例 $x'' + f(x) x' + g(x) = 0$.

を考える。

$y = x'$ として
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x)y - g(x) \end{cases}$$
とかける。

$$\begin{cases} f^1(x, y) = y, \\ f^2(x, y) = -f(x)y - g(x) \end{cases}$$
とおくとき、

$$\frac{\partial f^1}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y} = -f(x) \text{ となる。}$$

よって、今、ある単連結領域 Ω で

$f(x) > 0 \quad ((x, y) \in \Omega)$ なるものがあるとき、

Ω 内に周期軌道はないことになる。