(11) 不変集合, 極限集合, ラサールの不変定理

$$\frac{du(t)}{dt} = f(u(t)), \quad u(0) = x \in \mathbb{R}^n$$

の解を $u(t;x)$ とかく。

・$S \subset \mathbb{R}^n$ が正不変集合とは, $\forall x \in S$ に対して

$u(t;x) \in S \ (\forall t \geq 0)$ となることをいう。

・正軌道 $\gamma^+ = \{ u(t;x_0) \mid t \geq 0 \}$ ($x_0 \in \mathbb{R}^n$ 固定)

に対して

$$L^+(\gamma^+) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists t_k \to \infty \text{ s.t.} \\ u(t_k;x_0) \to \xi \end{array} \right\}$$

とおき, γ^+ の正極限集合 (あるいは ω-limit set)

という

命題35 $L^+(\gamma^+)$ は閉集合.

(∵) $\xi_m \in L^+(\gamma^+)$ $(m \geq 1)$ で $\xi_m \to \xi$ $(m \to \infty)$

として $\xi \in L^+(\gamma^+)$ を示す。

まず, ∃部分列 $\{\xi_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ s.t.

$$\|\xi_{m_j} - \xi\| < \frac{1}{j} \quad (j \geq 1)$$ としてよい.

$\xi_{m_j} \in L^+(\gamma^+)$ なので $\exists t_k^{(j)} \to \infty \ (k \to \infty)$ s.t

$$u(t_k^{(j)}; x_0) \to \xi_{m_j} \quad (k \to \infty).$$

$\therefore$ $\exists$ ~~部分列~~ $t_{k_j}^{(j)} \in \{t_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ s.t

$$\| u(t_{k_j}^{(j)}; x_0) - \xi_{m_j} \| \leq \frac{1}{j} \quad (j = 1, 2, \cdots).$$

よって、$\tilde{t}_j = t_{k_j}^{(j)}$ として、$\tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < \cdots < \tilde{t}_k \to \infty$

なるようとることもできるので

$$\| u(\tilde{t}_j; x_0) - \xi \| \leq \frac{2}{j} \to 0 \quad (j \to \infty) \text{ となる.}$$

$\therefore$ $\xi \in L^+(\gamma^+)$ となる。

命題36 $\gamma^+ = \{u(t; x_0) \mid t \geq 0\}$ が有界とする。

このとき $L^+(\gamma^+)$ も有界閉で $L^+(\gamma^+) \neq \phi$.

(∵)

γ^+ の閉包 $\overline{\gamma^+}$ は有界閉集合となる。

$L^+(\gamma^+)$ の定義より $L^+(\gamma^+) \subset \overline{\gamma^+}$.

よって $L^+(\gamma^+)$ も有界閉となる。

$\forall t_n \to \infty$ に対し $\{u(t_n; x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ は有界列となるので

$\exists$ 部分列 $\{u(t_{n_k}; x_0)\}$ s.t $u(t_{n_k}; x_0) \xrightarrow[k\to\infty]{} \exists \xi$

$\therefore$ $\xi \in L^+(\gamma^+)$ となり $L^+(\gamma^+) \neq \phi$ となる. ▨

命題37 γ^+が有界とするとき、

$$\lim_{t\to+\infty} d\left(u(t;x_0),\ L^+(\gamma^+)\right)=0.$$

(∵) そうでないとすると、$\exists\delta>0$ と $\exists\{t_n\}$, $t_n\to\infty$

s.t. $d\left(u(t_n;x_0),\ L^+(\gamma^+)\right)\geqq\delta \quad (\forall n\geqq 1)$. ㊟

一方仮定より $\{u(t_n;x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ は有界列なので、

$\exists u(t_{n_k};x_0)\to\exists\xi$ とできる

$\therefore \xi\in L^+(\gamma^+)$ となるが ㊟ に矛盾する。

命題38 $\forall\omega\in L^+(\gamma^+)$ に対し、

$$\gamma(\omega)=\{u(t;\omega)\mid t\in\mathbb{R}\}\subset L^+(\gamma^+).$$

(∵) $t=t_0$ で $u(t_0)=\xi$ なる解を $u(t;t_0,\xi)$ で

表すと、

$$\gamma^+=\{u(t;0,x_0)\mid t\geqq 0\}.$$

今 $\forall\omega\in L^+(\gamma^+)$ をとると、$\exists t_k\to\infty$ s.t.

$(x_k$ とおく $=)\ u(t_k;0,x_0)\to\omega$.

このとき $u(t;0,x_0)=u(t;t_k,x_k)=u(t-t_k;0,x_k)$

解の一意性より　　となることに注意。　$(=\tau)$

ここで $\tau = t - t_k$ とし、$k \to \infty$ で $x_k \to w$

なることと、初期値に対する解の連続性より

$$u(\tau; 0, x_k) \to u(\tau; 0, w) \quad (k \to \infty)$$

（これは、$\tau \in J$（有界区間）上で一様収束する）

となる。

一方 $\lim_{t \to \infty} d(u(t; 0, x_0), L^+(\gamma^+)) = 0$.

$\therefore$ $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists T > 0$ s.t.

$$d(\underbrace{u(t; 0, x_0)}_{=u(\tau; 0, x_k)}, L^+(\gamma^+)) < \varepsilon . \quad (\forall t \geq T)$$

$t = \tau + t_k$

（i.e. $\tau \geq T - t_k$）

となる。

この式で $k \to \infty$ とすると、

$$d(u(\tau; 0, w), L^+(\gamma^+)) \leqq \varepsilon \quad (\forall \tau \in \mathbb{R})$$

となる。$\forall \varepsilon > 0$ は任意なので、これより

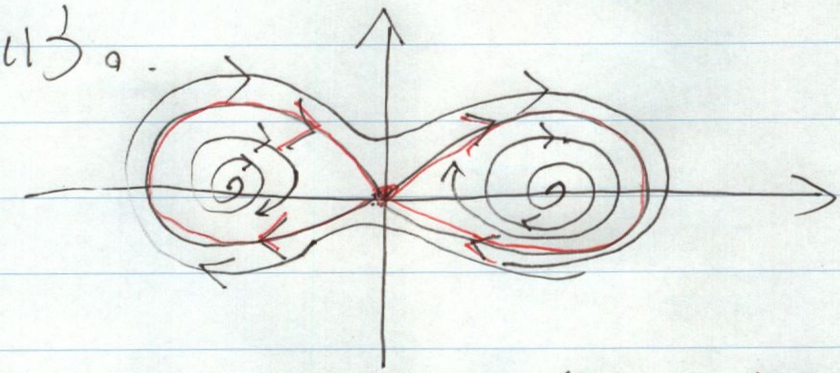
$$d(u(\tau; 0, w), L^+(\gamma^+)) = 0 \quad (\forall \tau \in \mathbb{R})$$

となる。$\therefore \underbrace{u(\tau; 0, w)}_{=u(\tau; w)} \in L^+(\gamma^+) \quad (\forall \tau \in \mathbb{R})$ $\square$

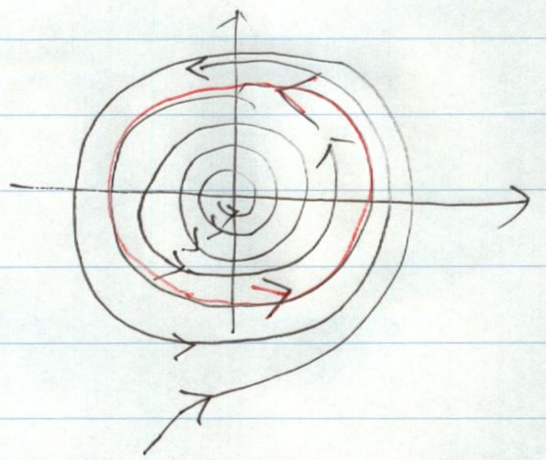
注　$L^+(\gamma^+)$：連結集合 となることもわかる。

（← [文献] 参）

・$L^+(\gamma^+)$上の点を通る解軌道を極限軌道という。



・$L^+(\gamma^+)$が唯1つの孤立した周期解の極限軌道からなるとき、$L^+(\gamma^+)$を極限周期軌道 (limit cycle) という



命題39 Vが平衡点x^0を含む有界閉集合D上でのリャプノフ関数とし、$c>0$に対し

$S = \{x\in D \mid V(x) \leqq c\}$が閉集合とする。

このとき Sは正不変集合となる。

∵ $S = \{x\in D \mid V(x) \leqq c\}$は有界閉集合となり、$\forall x \in S$に対して

$\frac{d}{dt}\left(V(u(t;x))\right) = \dot{V}(u(t;x)) \leqq 0$ となるので

$$V(u(t;x)) \leqq V(x) \leqq c \quad (\forall t \geqq 0).$$

$\therefore u(t;x) \in S \ (\forall t \geqq 0)$ となるので

S は正不変集合となる。 □

<u>定理 **40**</u>（ラサールの不変定理）

V が平衡点 u^0 を含む有界閉集合 D 上の

リャプノフ関数とする。

$c>0$ に対し、$S = \{x \in D \mid V(x) \leqq c\}$ が

閉集合とし、$V(u(t;x))$ が一定となるような

$x \in S$ が u^0 以外にないとする。

このとき、$\forall x \in S$ に対して

$$u(t;x) \to u^0 \quad (t \to +\infty)$$

が成りたつ。

<u>proof.</u> $x \in S$ とし、$\gamma^+ = \{u(t;x) \mid t \geqq 0\}$

に対する正極限集合を $W = L^+(\gamma^+)$ とおく。

S は有界閉集合で $\gamma^+ \subset S$ となる。

$\therefore W \neq \phi$, $W \subset S$ で W は有界閉となる。

<u>claim</u>: V は W 上で一定となる。

$(\leadsto W = L^+(\gamma^+) \subset \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$ となる。$)$

∵) そうでないなら、$\exists z_1 \neq z_2$, $z_1, z_2 \in W = L^+(\gamma^+)$

s.t. $u(\exists t_k; x) \to z_1$, $u(\exists s_\ell; x) \to z_2$.

かつ $a = V(z_1) < b = V(z_2)$.

Vの連続性から、$\exists N > 0$ s.t.

$$k \geq N \Rightarrow V(u(t_k; x)) < \frac{a+b}{2},$$

$$s_\ell > t_k \text{ なら } V(u(s_\ell; x)) \leq V(u(t_k; x)) < \frac{a+b}{2}$$

$$(k \geq N)$$

となるが $V(u(s_\ell; x)) \to b$ に矛盾. ☒

また、$W = L^+(\gamma^+)$は不変集合（特に正不変集合）

であった。よって、$\forall z \in W$に対し、

$u(t; z) \in W$ ($\forall t \geq 0$).

$\therefore V(u(t; z)) =$ 一定 ($\forall t \geq 0$).

仮定より、~~[illegible]~~ $z = u^0$ となり、

すなわち $W = L^+(\gamma^+) = \{u^0\}$ となる。

Claim: ~~[illegible]~~ $u(t; x) \to u^0$ ($t \to \infty$)

∵) そうでないなら、~~[illegible]~~

$\exists \{t_k\}, t_k \to \infty$ $\| u(t_k; x) - u^0 \| \geq \exists \delta > 0$.

一方、$\{u(t_k; x)\}$が有界なので $\exists$部分列 $\{t_{k_j}\}$ s.t. $\| u(t_{k_j}; x) - \exists u' \| \to 0$ ($j \to \infty$)

∴ $u' \in W = L^+(\gamma^+)$ かつ $u' \neq u^0$ となるが

$W = \{u^0\}$ であることに矛盾. □

系 4.1 $Z = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$ とおくとき.

$\{u^0\}$ が Z 内の最大の正不変集合であるなら、

$L^+(\gamma^+) = \{u^0\}$ となり $^\forall x \in S$ に対して

$u(t;x) \to u^0 \quad (t \to \infty)$ が成立.

∵ $L^+(\gamma^+) \subset Z$ であることと、仮定より

$L^+(\gamma^+) = \{u^0\}$ となる。このとき

$u(t;x) \to u^0 \quad (t \to \infty) \quad ({}^\forall x \in S)$

なることは前のギロンと同じ. □

例 1 $x'' + \underset{\substack{\vee \\ 0}}{\varepsilon} x' + f(x) = 0$.

ここで $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^1 級で

$f(0) = 0, \quad x f(x) > 0 \quad (x \neq 0)$

をみたすとする。（例えば $f(x) = x^3$）

$$(*) \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x) - \varepsilon y \end{cases}$$ とかける。

$$V(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \int_0^x f(s)\,ds$$ とおくと、

$$V(0,0) = 0, \quad V(x,y) > 0 \quad ((x,y) \neq (0,0))$$

であり $$\dot{V} = \nabla V \cdot \begin{pmatrix} y \\ -f(x) - \varepsilon y \end{pmatrix}$$

$$= f(x) y + y(-f(x) - \varepsilon y) = -\varepsilon y^2 \leqq 0$$

となる。

(*)の平衡点は$(0,0)$のみで $V(x,y)$が

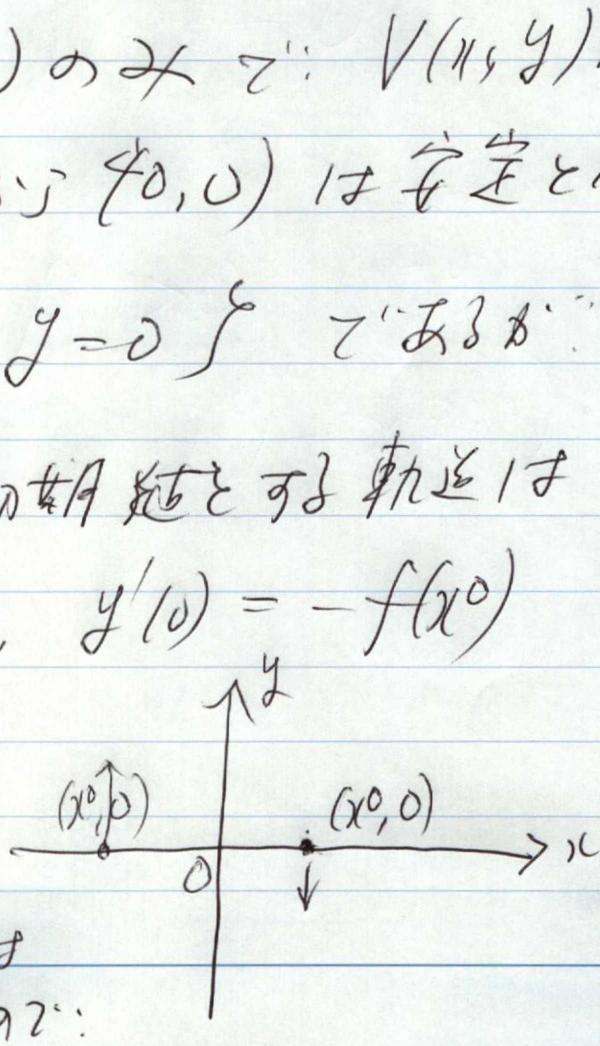
リャプノフ関数となることから $(0,0)$ は安定となる。

$Z = \{(x,y) \mid \dot{V}(x,y) = 0\} = \{y = 0\}$ であるが

$(x^0, 0) \in Z$ を初期値とする軌道は

$$x'(0) = 0, \quad y'(0) = -f(x^0)$$

より、$x^0 \neq 0$ ならば



Zをはみでることより

Z 内の最大の正不変集合は

$\{(0,0)\}$ となるので

いかなる初期値 (x_0, y_0) から出発した軌道に対しても

$$u(t; (x_0, y_0)) \to (0,0) \quad (t \to +\infty) \text{ となる.}$$

$\therefore$ $(0,0)$ は大域的漸近安定となる.

<u>例.2</u> $\begin{cases} x' = y - xy^2 \\ y' = -x^3 \end{cases}$.

$(0,0)$ のみが平衡点...

($(0,0)$ での線形化行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

$V(x,y) = x^4 + 2y^2$ とおくと $V(0,0) = 0$,

$V(x,y) > 0 \quad ((x,y) \neq (0,0))$ で

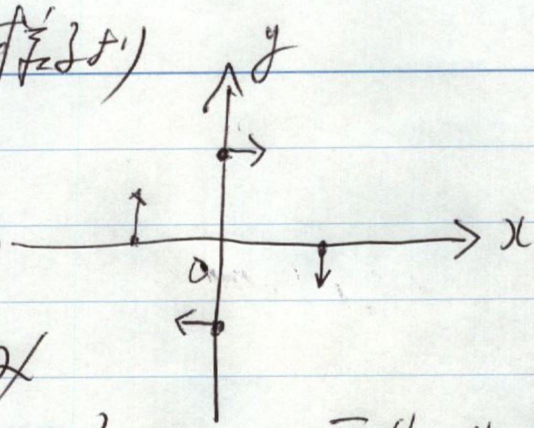
$$\mathring{V} = (4x^3, 4y) \cdot \begin{pmatrix} y - xy^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} = 4x^3(y - xy^2) - 4yx^3$$

$$= -4x^4y^2 \leqq 0 \text{ となる.}$$

$\therefore$ $(0,0)$ は安定.

$Z = \{(x,y) \mid \mathring{V}(x,y) = 0\} = \{x=0\} \cup \{y=0\}$ であるが

図の解軌道の様子より



Ω内の最大の

正不変集合は

$\{(0,0)\}$のみ

となることがわかるので ラサールの定理より

$(0,0)$は大域的漸近安定となる。