§6. リャプノフの方法.

$V : D\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ を C^1級で $\overline{D}$上連続とする。(Dは有界領域とする.)

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x)\, f^i(x)$$ と定める。

ここで $f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ \vdots \\ f^n(x) \end{pmatrix}$ であって、微分方程式

$$\frac{du(t)}{dt} = f(u(t)) \quad \cdots (*)$$

の解の挙動を考えているものとする。

今 $u(0) = x \in \mathbb{R}^n$ を初期値とする解を $u(t;x)$ で書くとき

$$\frac{d}{dt}\left(V(u(t;x))\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\left(u(t;x)\right) \frac{\partial u^i}{\partial t}(t;x)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\left(u(t;x)\right) f^i(u(t;x))}_{} \text{“}=\underbrace{\dot{V}(u(t;x))}_{}\text{”}$$

なので $$\frac{d}{dt}\left(V(u(t;x))\right)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x)\, f^i(x) = \dot{V}(x)$$

となることに注意しよう。

$u^0 \in D$ に対し、$V(u^0)=0$ で $V(x)>0$ $(x\in D\setminus\{u^0\})$

なるとき、$V(x)$ は ~~において~~ D上で正定値であるという

さらに $\dot{V}(x) \leqq 0$ $(\forall x \in D)$

なるとき、$V(x)$ を D上の リャプノフ関数という。

<u>定理33</u> $u^0 \in D$ とし、$f(u^0)=0$ とする。

ある u^0 の有界な近傍 D で C^1 級の f $V(x)$ で

$V(u^0)=0$, $V(x)>0$ $(x \in D\setminus\{u^0\})$

かつ $\dot{V}(x) \leqq 0$ $(x\in D)$

なる $V(x)$ が存在するならば、平衡点 u^0 は

安定となる。さらに

$\dot{V}(x) < 0$ $(x \in D\setminus\{u^0\})$

なるとき u^0 は漸近安定となる。

proof $\forall \varepsilon>0$ に対し、$\exists r\in(0,\varepsilon]$ s.t.

$B_r(u^0)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-u^0\| \leqq r\} \subset D$,

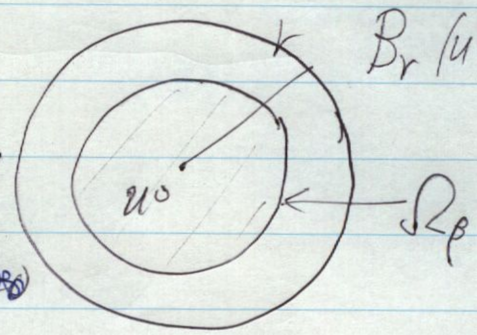
そこで $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$ とおくと 仮定より

$\alpha>0$ となる。そこで $0<\beta<\alpha$ なる β をとって

$\Omega_\beta = \{x\in B_r(u^0) \mid V(x)\leqq\beta\}$ とおくと.

Ω_β は $B_r(u^0)$ の内部に入ることになる.

このとき $\forall y \in \Omega_\beta$ に対し



$$\frac{d}{dt}\left(V(u(t;y))\right)$$

$$= \dot{V}(u(t;y)) \leqq 0.$$

となり このことは $V(u(t;y))$ は $t \geqq 0$ に関し,

単調減少となることを示している.

$$\therefore\ V(u(t;y)) \leqq V(u(0;y)) = V(y) \leqq \beta \quad (\forall t \geqq 0)$$

となり, $u(t;y) \in \Omega_\beta$ $(\forall t \geqq 0)$ となる。

また $V(u^0)=0$ と V の連続性より, $\beta > 0$ に対し, $\exists \delta > 0$ s.t.

$\|x - u^0\| \leqq \delta$ なら $V(x) < \beta$ が成立.

$$\therefore\ B_\delta(u^0) \subset \Omega_\beta \subset B_r(u^0) \text{ となる。}$$

よって $\|x - u^0\| \leqq \delta$ (i.e. $x \in B_\delta(u^0)$) なら $x \in \Omega_\beta$ となり

$u(t;x) \in \Omega_\beta$ $(\forall t \geqq 0)$ $\therefore\ \|u(t;x) - u^0\| \leqq r \leqq \varepsilon$

となる。

このことは、u^0が安定であることを示している。

次に $\dot{V}(x) < 0 \quad (x \in D \setminus \{u^0\})$

なら、u^0が漸近安定を示す。

すなわち $\forall a > 0$ に対し、$\exists T > 0$ s.t.

~~$x \in B_\delta(u^0)$に対して~~

$$t > T \Rightarrow \|u(t;x) - u^0\| < a$$

を示せばよい。さきほどと同じ議論により、

$a > 0$ に対し、$\exists b > 0$ s.t.

$$\Omega_b \subset B_a(u^0)$$ となるので

$$V(u(t;x)) \to 0 \quad (t \to \infty)$$

を示しさえすればよい。$V(u(t;x)) \geq 0$ であって

$V(u(t;x))$はtに関し単調減少なので

$$\exists \lim_{t \to +\infty} V(u(t;x)) = \exists c \geq 0$$

となる。

今、もし $c > 0$ とすると $\exists d > 0$ s.t.

$$B_d(u^0) \subset \Omega_c$$

となり、$V(u(t;x)) \geq c \quad (\forall t \geq 0)$ となるので

$$\|u(t;x) - u^0\| \geq d \quad (\forall t \geq 0)$$ となる。

そこで $-\gamma = \max_{d \leq \|x - u^0\| \leq r} \dot{V}(x) \quad (< 0)$

とおくと

$$V(u(t;x)) - V(\underset{x}{\underset{\shortparallel}{u(0;x)}}) = \int_0^t \underbrace{\frac{d}{d\tau}(V(u(\tau;x)))}_{\dot V(u(\tau;x))}\, d\tau$$

$$\leq -\gamma t \qquad (t \geq 0)$$

となるが (右辺) $\to -\infty$ $(t\to\infty)$ となり 矛盾.

$\therefore$ $c=0$. となり. u^0が漸近安定 となる. $\square$

注) リャプノフの方法は, 線形化行列によって. u^0が漸近安定とわかっている場合でも. u^0に近づく初期値 x の集合 (吸引領域 という) を広くとれることが多いというメリットがある。

上の状況で $\dot V(x) < 0$ $(x \in D\setminus\{u^0\})$ なら. $\forall x \in D\setminus\{u^0\}$ に対し $u(t;x) \to u^0$ $(t\to\infty)$ となることに注意。

系34 平衡点 u^0 に対し,

$V(u^0)=0$, $V(x)>0$ $(x\in R^n\setminus\{u^0\})$

$\dot V(x) < 0$ $(x \in R^n\setminus\{u^0\})$

かつ $\lim_{\|x\|\to+\infty} V(x) = +\infty$

ならば u^0は 大域的漸近安定. (i.e. $\forall x\in R^n$ に対し $u(t;x)\to u^0$ $(t\to+\infty)$)

(ii) $\forall c>0$ に対し $\exists r>0$ s.t.

$$\|x-u^0\|>r \Rightarrow V(x)>c.$$

となる。よって $V(x)\leqq c$ なら $\|x-u^0\|\leqq r$ が成立する。∴ $\Omega_c=\{x \mid V(x)\leqq c\}$ は

有界閉集合となる。このことから、さきほどの

定理の証明が同様にできて、$\forall x\in\mathbb{R}^n$ に対し

$x\in\Omega_c$ なる $c>0$ をとって、

$$\lim_{t\to\infty} V(u(t;x))=0$$

を示せ、従って $u(t;x)\to u^0$ $(t\to+\infty)$

をうる。 $\boxed{\text{証}}$

例
$$\begin{cases} u'=-u-uv^2 \\ v'=-v+3u^2v \end{cases}$$

まず平衡点は $u+uv^2=0$ かつ $v=3u^2v$ より

$u=0$. 従って $v=0$. ∴ $(0,0)$ のみ.

$V(\cancel{x,y})=a\cancel{x}^2+b\cancel{y}^2$ の形でリャプノフ関数
$u^2\qquad v$

をさがす.

$$\dot{V}(\cancel{x,y}\,u,v)=(2au,2bv)\begin{pmatrix}-u-uv^2\\ -v+3u^2v\end{pmatrix}$$

$= -2au^2 - 2au^2v^2 - 2bv^2 + 6bu^2v^2$

（そこで $a=3,\ b=1$ ととると）

$= -6u^2 - 2v^2 < 0 \quad (\forall (u,v) \neq (0,0))$

となる。

$\therefore\ V(u,v) = 3u^2 + v^2$ はリャプノフ関数で

$\dot{V}(u,v) < 0 \quad ((u,v) \neq (0,0))$ をみたすので

$(0,0)$ は漸近安定。

さらに $\|(u,v)\| \to \infty$ で $V(u,v) \to +\infty$ なので

$(0,0)$ は大域的漸近安定 ともなる。

(注) 線形化行列は $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

となるので $(0,0)$ は漸近安定 ~~は~~ となることは

これからもわかる。