§.5 非線形方程式の解の安定性.

$$\frac{du}{dt}(t) = f(u(t)), \quad t \in \mathbb{R} \quad \cdots (*)$$

の解の挙動を調べたい。

(注) 今まで:より一般に $\frac{du}{dt}(t) = f(t, u(t))$

の解を考えてきたが, (*)を自動系という.

(or 自律系)

簡単のため, 常に時間大域解を考える.

$f(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ は. なめらかな関数とする。

初期条件 $u(0) = u^0 \in \mathbb{R}^n$ をみたす

唯1つの解 $u(t)$ を $u(t; u^0)$ とかく。

$$\mathcal{O}(u^0) = \{u(t; u^0) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$$

を u^0を通る解軌道という。

(1) 平衡点.

$f(u^*) = 0$ をみたす $u^* \in \mathbb{R}^n$ を平衡点.

という.

(iii) 漸近安定性: 平衡点 x^* が漸近安定 (~~asymptoticallystabolotiy~~ asymptotically stable) とは.

x^* が安定であって, ある $\tilde{\delta}>0$ があって.

$\|x_0 - x^*\| < \tilde{\delta}$ なる x_0 に対し, $u(0)=x_0$ に対する解 $u(t)$ は $\|u(t)-x^*\| \to 0 \ (t \to +\infty)$

が成り立つことをいう。

・ x^* の安定性を調べるために $f(u)$ を x^* のまわりにテイラー展開する;

$$f(u) = f(x^*) + Df(x^*)(u-x^*) + g(u),$$

$g(u)$ は, $\|u-x^*\|$ が小さいとき, ある $C>0$ があって $\|g(u)\| \leq C\|u-x^*\|^2$.

が成り立つ.

ここで $Df(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n}(x^*) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n}(x^*) \end{pmatrix}$; x^* での線形化行列という

$n \times n$ 定数行列.

このとき $u(t) \equiv u^*$ は (*) の解となる.
(i.e. $u(t; u^*) \equiv u^*$.)

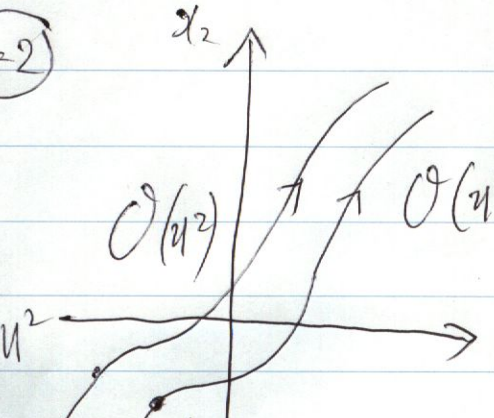
<u>命題3.1</u> $u^1, u^2 \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\mathcal{O}^1 = \mathcal{O}(u^1)$ と $\mathcal{O}^2 = \mathcal{O}(u^2)$ は $\mathcal{O}^1 \cap \mathcal{O}^2 = \phi$ 又は $\mathcal{O}^1 = \mathcal{O}^2$ が成りたつ.

(∵) $\exists x^0 \in \mathcal{O}^1 \cap \mathcal{O}^2$ として $\mathcal{O}^1 = \mathcal{O}^2$ を示す.

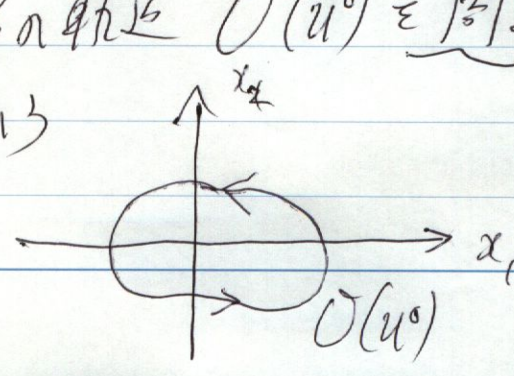
仮定より, ある $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ があって
$$x^0 = u(t_1; u^1) = u(t_2; u^2) \text{ となる}$$
このとき
$$u(t; x^0) = u(t+t_1; u^1) = u(t+t_2; u^2)$$
であることが $t=0$ で同じ初期値をもつ (*) の解であることから一意性定理よりわかる。

このことは $\mathcal{O}^1 = \mathcal{O}(u^1) = \mathcal{O}(u^2) = \mathcal{O}^2$ を示している. □

(n=2)



$u(t; u^0)$ が周期関数のときは その軌道 $\mathcal{O}(u^0)$ を <u>周期軌道</u> という



(ii) 安定性；　平衡点 u^* が 安定 (stable) とは、

$\forall \varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ があって、

$\|u^0 - u^*\| < \delta$ なる u^0 に対し

$$\|u(t; u^0) - u^*\| < \varepsilon \quad (\forall t \geq 0)$$

が成り立つことをいう。安定でないとき、u^* は

不安定 (unstable) な平衡点という。

(iii) 漸近安定性：　平衡点 u^* が 漸近安定

(asymptotically stable) とは　u^* が安定で

あって、さらに ある $\tilde{\delta} > 0$ があって、

$\|u^0 - u^*\| < \tilde{\delta}$ なる u^0 に対して、

$$\|u(t; u^0) - u^*\| \to 0 \quad (t \to +\infty)$$

が成り立つことをいう。

(注)　ある $M > 0$, $\tau > 0$ があって

$$\|u(t; u^0) - u^*\| \leq M e^{-\tau t} \quad (t \geq 0)$$

なるとき、u^* は 指数関数的漸近安定 ともいう。

$f(x)$ を $x=u^*$ のまわりにテイラー展開する、

$$f(x)=\begin{pmatrix} f^1(x) \\ \vdots \\ f^n(x) \end{pmatrix} \text{ で、 } u^*=\begin{pmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ として、}$$

$$f^i(x)=f^i(u^*)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(u^*)(x_j-u_j^*)$$

$$+\ g^i(x),\quad (i=1,\dots,n)$$

但し、$g(x)=\begin{pmatrix} g^1(x) \\ \vdots \\ g^n(x) \end{pmatrix}$ は、$\|x-u^*\|$ が小さいとき、

ある $C>0$ s.t. $\|g(x)\| \leqq C\|x-u^*\|^2$

をみたす。

上記を行列表示

$$Df(u^*)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(u^*) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n}(u^*) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1}(u^*) & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x_n}(u^*) \end{pmatrix}$$

（u^* での線形化行列 という）

を用いて

$$f(x)=\underbrace{f(u^*)}_{\overset{\shortparallel}{0}}+Df(u^*)(x-u^*)+g(x).$$

となる。

改めて、$v(t) = u(t) - u^*$ とおくことで

(*) $\Longleftrightarrow$ $$\frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + g(v(t))$$ となる。

……(**)

$A = Df(u^*)$ … $n \times n$ 定数行列。

ただし、$g(y)$ は、y が小さいとき $\exists C > 0$ s.t.

$\|g(y)\| \leqq C\|y\|^2$ をみたす。

$u(t)$ の平衡点 u^* の近くでの挙動は、
(**) の解 $v(t)$ の 0 の近くでの挙動を調べることに帰着される。

A の固有値の実数の正負で次のように分解される

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u \quad (\text{直和})$$

ここで E^s ; A の固有値のうち実部が負である(広義)固有空間

E^c ; A の固有値のうち実部が 0 である(広義)固有空間

E^u ; A の固有値のうち実部が正である(広義)固有空間。

特に $E^c=\{0\}$ のとき，$v(t)$ の 0 の近くでの挙動（従って $u(t)$ の u^* の近くでの挙動）は，

線形方程式
$$\frac{dv(t)}{dt}=Av(t) \quad \cdots (**)'$$

と定性的に同じとなることが知られている．

特に次が成立する．

<u>定理3.2</u> A のすべての固有値の実部が負であれば，

$v^0\in\mathbb{R}^n$ が十分小のとき，$v(0)=v^0$ で $(**)'$

をみたす解 $v(t)$ は $\|v(t)\|\to 0$ $(t\to\infty)$ をみたす．

実は ある $M>0$，ある $\tau>0$ が存在して
$$\|v(t)\|\leqq Me^{-\tau t} \quad (t\geqq 0)$$

が成り立つ。

(∵) 仮定より $\exists\, C>0$，$\exists\,\delta>0$ s.t.
$$\|e^{tA}\|\leqq Ce^{-\delta t} \quad (t\geqq 0)$$

が成り立つ．
$$\therefore \underset{\text{となる}}{\|e^{tA}x\|}\leqq Ce^{-\delta t}\|x\| \quad (\forall x\in\mathbb{R}^n).$$

$$v(t) = e^{tA}v^0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(v(s))\,ds \cdots$$

とみなす. 今 $g(v)$ の性質から. $\exists \delta_1 > 0$ s.t.

$\|v\| \leqq \delta_1$ なら $\|g(v)\| \leqq {}^{\exists}C_1 \|v\|^2$ となる.

今

$$\|v(t)\| \leqq \|e^{tA}v^0\| + \int_0^t \underbrace{\|e^{(t-s)A}\|}_{\leqq Ce^{-\delta(t-s)}} \|g(v(s))\|\,ds.$$

$$\leqq Ce^{-\delta t}\|v^0\|$$

となり.

$$e^{\delta t}\|v(t)\| \leqq C\|v^0\| + C\int_0^t e^{\delta s}\|g(v(s))\|\,ds.$$

となる。

そこで $V(t) \equiv e^{\delta t}\|v(t)\|$ とおく。

$V(0) = \|v^0\|$ となる。

$\|v^0\| < \delta_1$ として. $V(t) \leqq \delta_1$ が成りたつ時間 ~~$0 \leqq t \leqq t_0$~~

$0 \leqq t \leqq t_0$ を考え. この範囲では

$\|v(t)\| \leqq e^{-\delta t}\delta_1 \leqq \delta_1$ なので

$$\|g(v(s))\| \leqq C_1 \|v(s)\|^2 \quad (0 \leqq s \leqq t_0)$$

$t = t_0$ ではじめて $V(t) = \delta_1$ となるとする.

となる

このことから　改めて

$$e^{\delta t}\|v(t)\| \leqq C\|v^0\| + C\int_0^t \underbrace{e^{\delta s} C_1 \|v(s)\|^2}_{\substack{\wedge\!\shortparallel \\ C_1 \cdot V(s)^2 e^{-\delta s} \\ \underset{\wedge}{} \\ \delta_1 V(s)}} ds.$$

$$\therefore V(t) \leqq C\|v^0\| + CC_1\delta_1 \int_0^t V(s) e^{-\delta s} ds$$

$$(0 \leq t \leq t_0)$$

となる．

よって　Gronwall の不等式より

$$V(t) \leqq C\|v^0\| e^{CC_1\delta_1\int_0^t e^{-\delta s}ds}$$

$$\leqq C\|v^0\| e^{CC_1\delta_1\int_0^\infty e^{-\delta s}ds}$$

$$= C\|v^0\| e^{CC_1\frac{\delta_1}{\delta}} \quad (0 \leq t \leq t_0)$$

……(#)

となる。よって．必要ならさらに

$$C\|v^0\| e^{CC_1\frac{\delta_1}{\delta}} < \delta_1$$

なるくらい $\|v^0\|$ を小さくとっておくと．

$$V(t) < \delta_1 \quad (0 \leq t \leq t_0)$$

となるが　$V(t_0) = \delta_1$ であったことに反する。

このことは, $0 \leq \forall t < \infty$ で $V(t) < \delta_1$ が成り立つことを示している. 従ってまた㈪より

$$\|U(t)\| \leq {}^{\exists}C\, e^{-\delta t}\|U^0\| \quad (\forall t \geq 0)$$

を得る. $\boxed{\text{//}}$

例

$$\begin{cases} u' = 1 - uv \ (= f^1(u,v)) \\ v' = u - v^3 \ (= f^2(u,v)) \end{cases}$$

まず平衡点を求める. $uv = 1$ かつ $v^3 = u$ をとく.

$u = \frac{1}{v}$ を代入して $v^4 = 1$. $\therefore v = 1$ or -1.

$\therefore (u^*, v^*) = \overset{P}{(1,1)}$ or $\overset{Q}{(-1,-1)}$ のみが平衡点.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u} & \frac{\partial f^1}{\partial v} \\ \frac{\partial f^2}{\partial u} & \frac{\partial f^2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v & -u \\ 1 & -3v^2 \end{pmatrix}$$ なので

P: $(1,1)$ での線形化行列は $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(3+\lambda) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$
$$= (\lambda+2)^2.$$

$\therefore \lambda = -2$.

$\therefore (u^*, v^*) = (1,1)$ は漸近安定. ($V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトル)

Q : $(-1,-1)$ での線形化行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

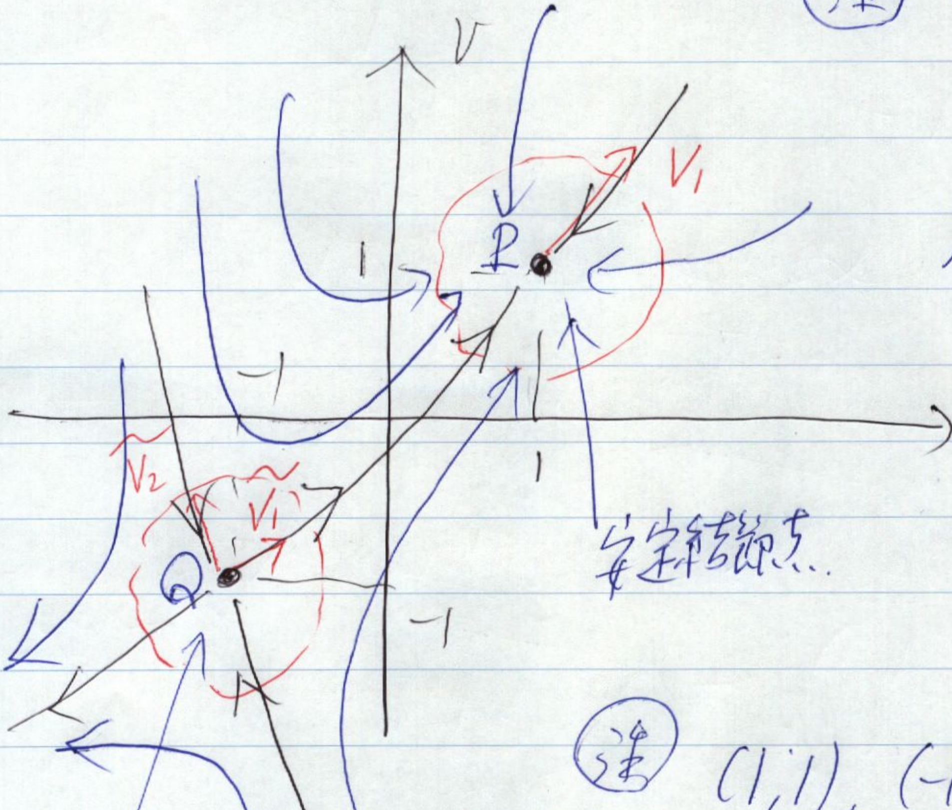
$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda)-1$$

$= \lambda^2+2\lambda-4 = 0$ をといて $\lambda = -1 \pm \sqrt{5}$.

$\therefore (u^*, v^*)$ は 不安定点 (鞍点).

注 $\lambda = -1+\sqrt{5} > 0$ の固有ベクトル $\vec{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5}-2 \end{pmatrix}$,

$\lambda = -1-\sqrt{5} < 0$ の固有ベクトル $\vec{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-\sqrt{5} \end{pmatrix}$



注 $(1,1)$, $(-1,-1)$ の近傍をはなれた場所での軌道の様子は，推測される挙動