2012.11.7 1

⑪ Aのスペクトル分解

固有多項式

$$\Phi(\lambda)=\det(A-\lambda I)$$
$$=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$$

とするとき．部分分数展開して．

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)}=\frac{h_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{m_1}}+\cdots+\frac{h_r(\lambda)}{(\lambda-\lambda_r)^{m_r}}$$ をうる。

このとき． $g_j(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_{j-1})^{m_{j-1}}(\lambda-\lambda_{j+1})^{m_{j+1}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$

とおくと．

$$1=h_1(\lambda)g_1(\lambda)+\cdots+h_r(\lambda)g_r(\lambda)$$ をうる．

このとき $P_j=h_j(A)g_j(A)\quad(j=1,\cdots,r)$

とおくと．

$$I=P_1+P_2+\cdots+P_r$$

をうる。ケーリー・ハミルトンの定理より

$$\Phi(A)=O\ .$$

さらに次が成りたつ．

命題28

(1) $P_i^2 = P_i$, $P_i P_j = O$ $(i \neq j)$

(2) $(A - \lambda_j I)^{m_j} P_j = O$. $(j = 1, \cdots, r)$

(3) $A = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j P_j + N$, とかける.

Nはべき零行列 (すなわち $N^n = O$)
かつ NはAやP_jと可換である.

Aのスペクトル分解という (証明は[笠原]参照)

P_jは $G_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda_j I)^{m_j} x = 0\}$ の上へ

(λ_jの一般化固有空間)

の射影行列となっている。

命題29

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \left\{ I + t(A - \lambda_j I) + \cdots + \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!} (A - \lambda_j I)^{m_j - 1} \right\} P_j$$

が成立.

$\because$ $e^{tA} = e^{tA}(P_1 + \cdots + P_r)$

ここで
各 j に対し

$$e^{tA}P_j = e^{t(\lambda_j I + (A-\lambda_j I))}P_j$$

$$= e^{t\lambda_j I}\cdot e^{t(A-\lambda_j I)}P_j$$

$$= e^{t\lambda_j}\left(I + t(A-\lambda_j I) + \cdots + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}(A-\lambda_j I)^{m_j-1}\right)P_j$$

$(\because)$ $\quad (A-\lambda_j I)^{l}P_j = 0 \quad (\forall l \geq m_j)$

だから.

となるので

結論を得る。 $\boxed{/\!/}$

例1 $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ のとき.

e^{tA} を射影行列を用いる方法で求めてみる.

$$\Phi(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1+\lambda)(5-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-3).$$

$\therefore \dfrac{1}{\Phi(\lambda)} = \dfrac{a}{\lambda-1} + \dfrac{b}{\lambda-3}$ として

$1 = a(\lambda-3) + b(\lambda-1)$ より $\quad a+b=0$ かつ $1 = -3a-b$.

$\therefore a = \dfrac{-1}{2},\quad b = +\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ 1 = -\frac{1}{2}(\lambda-3) + \frac{1}{2}(\lambda-1)$$

$$\therefore\ P_1 = -\frac{1}{2}(A-3I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(A-I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

ケーリー・ハミルトンの定理より $(A-3I)(A-I)=O$.

$\therefore$ $(A-I)P_1 = O$, $(A-3I)P_2 = O$ となるので

$$e^{tA} = e^{t}P_1 + e^{3t}P_2 \quad \text{となる.}$$

$\therefore$ $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = x_0 \left(= \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix}\right)$$

の解は $u(t) = e^{tA}x_0$.

$$= e^{t}P_1x_0 + e^{3t}P_2x_0 \quad \text{となる.}$$

ここで $P_1x_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix} = (2x_0^1 - x_0^2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$P_2x_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix} = (-x_0^1 + x_0^2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

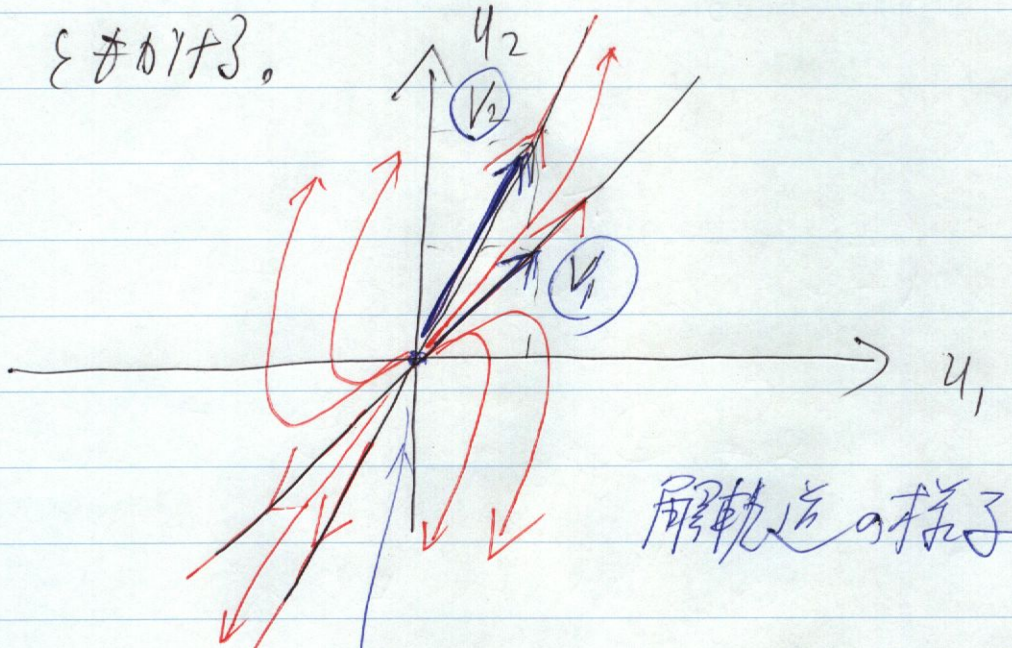
$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおくと

V_1, V_2 は 行列 A の 固有値 $\lambda_1=1, \lambda_2=3$ の
固有ベクトルであり.

$$x(t) = C_1 e^{t} V_1 + C_2 e^{3t} V_2$$

$$\left(但し.\ C_1 = 2x_0^1 - x_0^2,\ C_2 = -x_0^1 + x_0^2 \right)$$

とかける。



解軌道の様子.

原点 $(0,0)$ は 不安定結節点. という.

(unstable node)

例. 2 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき.

$$\Phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^2.$$

$$\because \frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda-2)^2} \quad より \quad P_1 = I.$$

$$\therefore e^{tA} = e^{2t}\left(I + t(A-2I)\right)P_1$$

$$= e^{2t} I + t e^{2t} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} //$$

$$(A-2I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (-x+y)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

∴ $V_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ として、$(A-2I)V_2 = V_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

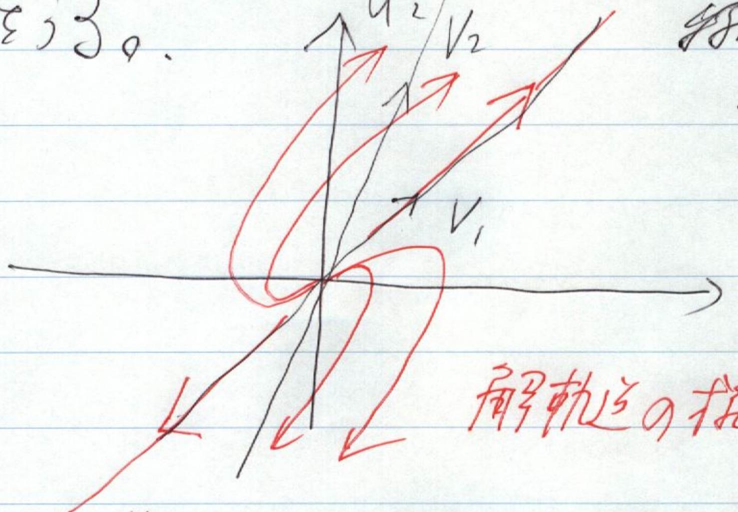
みたす V_2 として $V_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ がとれる.

$x_0 = c_1 V_1 + c_2 V_2$ とするとき

$$u(t) = e^{tA}x_0 = e^{2t}(c_1V_1 + c_2V_2) + te^{2t}\underbrace{(A-2I)(c_1V_1+c_2V_2)}_{=\,c_2V_1\ \text{となる}}$$

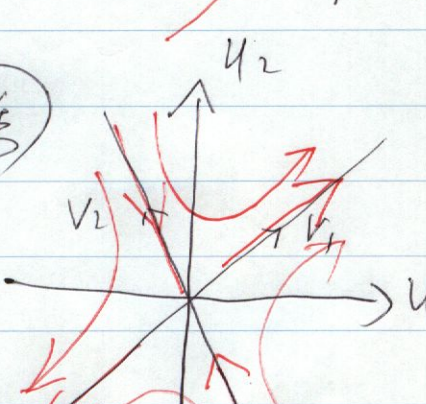
$$= (c_1 + c_2 t)e^{2t}V_1 + c_2 e^{2t}V_2$$

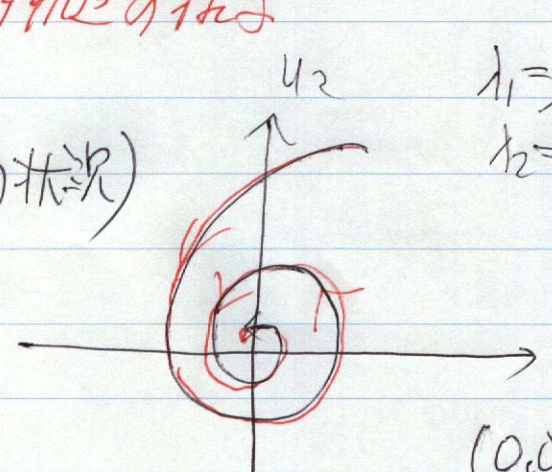
となる。



特に $\dfrac{u(t)}{te^{2t}} \to c_2 V_1$ $(t \to +\infty)$ に収束。

(注) (その他の状況)





$\lambda_1 = \mu_1 + i\xi_1$
$\lambda_2 = \mu_1 - i\xi_1$ $(\xi_1 \neq 0)$

$\mu_1 < 0$ のとき.

$(0,0)$ は 安定渦状点 (stable focus) という

$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$ のとき $(0,0)$ は 鞍状点 (サドル saddle) という.

⑪ 周期係数をもつ微分方程式

(＊) $$\frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t).$$

ある実数 $T>0$ があって

$$A(t+T) = A(t) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

をみたす場合を考える.

($A(t)$ は T-周期をもつという)

Q. このとき. 周期解 $u(t)$ をもつか?

最も簡単な場合をまず考える.

$n=1$ で $u'(t) = a(t)u(t)$, を考える.

$$(a(t+T) = a(t))$$

$u(0) = u_0$ の解は

$$u(t) = u_0 e^{\int_0^t a(s)ds}$$ となる.

今. $b = \frac{1}{T}\int_0^T a(s)ds$ として.

$p(t) = a(t) - b$ とおくと.

$\int_0^T p(s)ds = \int_0^T a(s)ds - b \cdot T = 0$ となり

$$u(t) = u_0 e^{\int_0^t (p(s)+b)ds}$$

$$= u_0 e^{bt} e^{\int_0^t p(s)ds}$$ とかける.

$$\therefore \ u(t) e^{-bt} = u_0 e^{\int_0^t p(s)ds}$$ となり

$$u(t+T) e^{-b(t+T)} = u_0 e^{\int_0^{t+T} p(s)ds}.$$

$$\int_0^{t+T} p(s)ds = \underbrace{\int_0^T p(s)ds}_{0} + \int_T^{t+T} \underbrace{p(s)}_{s=T+\tau} ds$$

$$= \int_0^t \underbrace{p(T+\tau)}_{p(\tau)} d\tau \leftarrow a(T+\tau) = a(\tau)$$

$$\therefore u(t+T) e^{-b(t+T)} = u_0 e^{\int_0^t p(\tau)d\tau} = u(t) e^{-bt}$$

となる。 $\therefore \ u(t+T) = u(t)$ となるためには

$e^{bT} = 1$ が必要十分条件.

$$\left(\Longleftrightarrow \ e^{\int_0^T a(s)ds} = 1 \ \left(\Longleftrightarrow \int_0^T a(s)ds = 0\right) \right)$$

定理30 (フロケ (Floquet) の定理)

$A(t+T) = A(t)$ とする.

$\frac{du}{dt} = A(t)u$ の 基本解行列の1つを

$V(t)$とすると次が成立する。

① ∃定数正則行列 C s.t.

$$V(t+T) = V(t)C$$

（特に $C = V(0)^{-1}V(T)$ とかける）

モノドロミー行列ともいう

② $V_1(t)$, $V_2(t)$（基本解行列）に対して

対応する行列 C を C_1, C_2 とかくとき

∃K：正則行列 s.t. $C_1 = K^{-1}C_2K$.

（特に Cの固有値は $V(t)$の取り方によらずに定まる

⊛の特性乗数という

or Floquet乗数という）

③ ⊛が周期Tの周期解をもつ

$\Longleftrightarrow$ 1がCの固有値となる。

さらに、このとき、周期解は1の固有ベクトル

cを用いて $u(t) = V(t)c$ とかける。

④ $C = e^{TB}$ なる行列Bが存在して

$P(t) = V(t)e^{-tB}$ は周期Tをもつ正則行列となる。

⑤ $u(t) = P(t)v(t)$ とすると (※)は

$$\frac{dv(t)}{dt} = Bv(t)$$ に変換される.

(い)

① $\frac{d}{dt}V(t) = A(t)V(t)$ をみたす.

基本解行列の定義から

$$\therefore \frac{d}{dt}(V(t+T)) = \underbrace{A(t+T)}_{A(t)} V(t+T)$$

となるので $V(t+T)$ も (※)の基本解行列となる.

よって、以前の結果より ∃ 正則行列 C s.t.

$$V(t+T) = V(t)C$$ が成立.

(特に $V(T) = V(0)C$, $\therefore C = V(0)^{-1}V(T)$).

② $V_1(t+T) = V_1(t)C_1$, $V_2(t+T) = V_2(t)C_2$

とすると. 一方で ∃K: 正則行列 s.t.

$$V_1(t) = V_2(t)K$$

$$\therefore V_1(t+T) = V_2(t)KC_1$$

$$\| $$

$$V_2(t+T)K = V_2(t)C_2K.$$

よって $C_2 K = K C_1$ を得る。

$\therefore\ C_1 = K^{-1} C_2 K$ を得る.

③ $\underset{\neq 0}{u(t)}$ が周期 T の周期解とする.

$V(t)$ は基本解行列なので、ある定数ベクトル $\underset{\neq 0}{\mathbf{c}}$

を用いて $u(t) = V(t)\mathbf{c}$ とかける.

$u(t+T) = u(t)$ なので

$$\underbrace{V(t+T)}_{\substack{\parallel\ ①より \\ V(t)C}}\mathbf{c} = V(t)\mathbf{c}$$

$\therefore\ C\mathbf{c} = \mathbf{c}$ となり

C は 1 を固有値にもつことがわかる.

逆に、$C\mathbf{c} = \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \neq 0$ が存在すれば

$u(t) = V(t)\mathbf{c}$ は

$$u(t+T) = V(t+T)\mathbf{c} = V(t)C\mathbf{c}$$
$$= V(t)\mathbf{c} = u(t)$$

となり $u(t)$ は周期 T をもつ周期解となる.

④ $P(t) = V(t)e^{-tB}$ に対し

$$P(t+T) = \underbrace{V(t+T)}_{=V(t)C}e^{-TB}\cdot e^{-tB}$$

$$= V(t)\left(Ce^{-TB}\right)e^{-tB}$$

となる，よって．$C = e^{TB}$ より

$$P(t+T) = V(t)e^{-tB} = P(t)$$ となる。

(注) Cは正則行列であることから，一般に

$C = e^{\tilde{B}}$ なる 行列 $\tilde{B}$ が存在する

ことが知られている $\uparrow$ $\therefore B = \frac{1}{T}\tilde{B}$ とおけばよい．

［答案］(参)．

⑤

$u(t) = P(t)v(t)$ とおくとき

$$\frac{du}{dt} = \underbrace{\frac{d}{dt}P}_{=}\cdot v(t) + P\frac{dv}{dt}$$

$P(t) = V(t)e^{-tB}$ より

$$\underbrace{\frac{dV}{dt}}_{=AV}e^{-tB} - V(t)Be^{-tB}.$$

$$= A\underbrace{P(t)v}_{=u(t)} - V(t)Be^{-tB}v + P\frac{dv}{dt}.$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = A u(t)$$

$$\Longleftrightarrow \quad P\frac{dv}{dt} = \underbrace{V(t) B e^{-tB}}_{\substack{\| \\ \underbrace{V(t) e^{-tB}}_{\substack{\| \\ P(t)}} \cdot B}} v$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = B v \quad \text{となる.}$$

$\square$

注1 正則行列 C に対して $C = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j P_j + N$ と表すとき.

$$\tilde{B} \left(= \log C \text{ とおく}\right) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=1}^{r} \left\{ (\log \lambda_j) I - \sum_{k=1}^{m_j - 1} \frac{1}{k \lambda_j^{k}} (\lambda_j I - C)^k \right\} P_j$$

(但し、$\lambda_j \in \mathbb{C}$ のときは
$\log \lambda_j = \log|\lambda_j| + i \arg \lambda_j$ とする)

とおくと $e^{\tilde{B}} = C$ となることが知られている.

注2 $A(t) = A$ (定数)行列のとき.

$A(t)$ は ${}^{\forall}T > 0$ で T-周期であるが

基本解行列 $V(t) = e^{tA}$ となることで

$C = V(0)^{-1} V(T) = e^{TA}$ となる。

例 $\dfrac{du}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{\sin t}{2-\cos t} \end{pmatrix} u$ ← 周期 $T=2\pi$

$u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ として $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = \dfrac{\sin t}{2-\cos t} y(t). \end{cases}$

∴ $y(t) = c_1(2-\cos t)$ (c_1:定数)

となることがわかる.

これから $x(t) = c_2 e^t + c_1\left(\dfrac{\cos t - \sin t}{2} - 2\right)$.

がわかるので

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\cos t - \sin t}{2} - 2 \\ e^t & 2-\cos t \end{pmatrix}$$

が1つの基本解行列となる。よってモノドロミー行列

$$C = V(0)^{-1}V(2\pi) = \begin{pmatrix} e^{2\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり Cの固有値は 1と$e^{2\pi}$.

∴1を固有値にもつので周期2πの解をもつことがわかり

1の固有ベクトル $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$をとって $u(t) = V(t)c = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos t - \sin t}{2} - 2 \\ 2-\cos t \end{pmatrix}$

は周期解.