2012.10.24

§4 線形微分方程式

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{1\le i,j\le n} \quad : n\times n \text{ 行列}.$$

各 $a_{ij}(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数とする.

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = A(t)u(t), & t\in\mathbb{R}. \\ u(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

は唯1つの解 $u(t)$ をもつ.

$$V = \left\{ u \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \begin{array}{l} u(t) \text{ は} \\ \dfrac{du(t)}{dt} = A(t)u(t),\ t\in\mathbb{R} \\ \text{をみたす.} \end{array} \right\}$$

とおく.

<u>命題14</u> V は実線形空間となる.

∵ $u_1, u_2 \in V$ かつ $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対して

$u = \alpha u_1 + \beta u_2 \in V$ を示せばよい.

$$\frac{du}{dt} = \alpha\left(\frac{du_1}{dt}\right) + \beta\left(\frac{du_2}{dt}\right) = \alpha(Au_1) + \beta(Au_2)$$

$$= A(\alpha u_1 + \beta u_2) = Au$$ となるから OK. □

命題15　$\dim V = n$.

(∵) $e_i \ (i=1,\dots,n)$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする.

$\left(\text{i.e.}\ e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} < i \right)$

初期値を $u(0) = e_i$ とったときの (1) の解を $u_i(t)$ とかく。

$\forall v \in V$ に対して, $v(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ とするとき

$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(t)$ とおくと.

$u \in V$ であって, $u(0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = v(0)$

となるので一意性より $u(t) = v(t)$ となる.

すなわち V は $\{u_i(t)\}_{i=1}^{n}$ で張られる。

主張: $\{u_i(t)\}_{i=1}^{n}$ は 1 次独立である.

(∵) $\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(t) \equiv 0$ として $c_i = 0 \ (\forall i=1,\dots,n)$

を示せばよい.

特に $t=0$ として $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i e_i}_{= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}} = 0$ となることになるが

$\therefore c_i = 0 \ (i=1,\dots,n)$ が示される. □

以上より $\dim V = n$ となる □

② ~~基本行列~~ 基本解行列.

一般に n 個の独立な $\{y_i(t)\}_{i=1}^{n}$ で

$$\frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t),\ t \in \mathbb{R} \cdots (*)$$

の解に対して、それらを第 i 列に並べた行列

$$Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \quad : n \times n \text{行列}$$

を $(*)$ の基本解行列という。 それを解系ベクトル

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = A(t)y_i(t) \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t).$$

となることに注意しよう。

・ $\forall C \in \mathbb{R}^n$ に対し、$X = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ ← $n \times n$ 行列 として

$$X(t)C = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t), \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

にも注意する。

命題16 $Y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$: $n \times n$ 行列

を (*) の基本解行列とすると、$^\forall t \in \mathbb{R}$ に対して、

$\{y_i(t)\}_{i=1}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の数ベクトルとして 1次独立

である。

(:) $^\forall t_0 \in \mathbb{R}$ に対して $\{y_i(t_0)\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^n$

が1次独立を示す。すなわち、

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow c_i = 0 \ (^\forall i = 1, \ldots, n)$$

を示す。

今 $x(t) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t)$ とおくと、

$x(t)$ は (*) をみたし、$x(t_0) = 0$ となるので

初期値問題の一意性から $x(t) = 0 \ (^\forall t \in \mathbb{R})$.

$$\therefore \sum_{i=1}^n c_i y_i(t) = 0 \ (^\forall t \in \mathbb{R})$$

となり、$\{y_i(t)\}_{i=1}^n$ が独立な解であったことから

$c_i = 0 \ (i = 1, \ldots, n)$ となる。 □

命題17 $X(t)$ を (*) の基本解行列とすると

$u(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ を初期条件とする (*) の解は

$$u(t) = X(t)X(t_0)^{-1}x_0$$ で与えられる.

∵ $u(t_0) = X(t_0)X(t_0)^{-1}x_0 = x_0$ であり

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt}X(t)\cdot X(t_0)^{-1}x_0$$

$$= A(t)\underbrace{X(t)X(t_0)^{-1}x_0}_{u(t)} = A(t)u(t)$$

となるので、主張が言える.

命題18 $X(t)$, $Y(t)$ を共に(*)の基本解行列とするとき $\exists C$: 正則行列(定数行列) s.t.

$$Y(t) = X(t)C$$ が成り立つ.

∵ $Y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$, $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$

とするとき $$y_i(t) = \sum_{j=1}^{n} {}^{\exists}c_{ij}\, x_j(t) \quad (\forall i)$$

(即. $Y(t) = X(t)C$) となる.

$(C = (c_{ij}))$

同様に $$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} {}^{\exists}d_{ij}\, y_j(t) \quad (\forall i)$$ となり

② $D=(d_{ij})$ として

$X(t)=Y(t)D$ となる。

∴ $Y(t)=Y(t)DC$ となるが、今まで、

$Y(t)$は正則行列なので $Y(t)^{-1}$を左から掛けて

$I_n=DC$ となる。∴ Cは正則 □

$b(t)=\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$，各$b_i(t)$は連続関数として

$$(2)\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt}=A(t)u(t)+b(t), & t\in\mathbb{R} \\ u(t_0)=x_0 \end{cases}$$

を考える。

<u>定理19</u>　(2)の解 $u(t)$は、(*)の基本解行列 $X(t)$を1つとって、

$$u(t)=X(t)X(t_0)^{-1}x_0+\int_{t_0}^{t}X(t)X(s)^{-1}b(s)\,ds.$$

で与えられる。

∵ 実際，$u(t_0)=x_0$ をみたし，

$$\frac{du(t)}{dt}=\frac{dX(t)}{dt}X(t_0)^{-1}x_0+\frac{dX(t)}{dt}\int_{t_0}^{t}X(s)^{-1}b(s)ds$$

$$+X(t)\cdot\left(X(t)^{-1}b(t)\right)$$

$$=A(t)X(t)X(t_0)^{-1}x_0+A(t)X(t)\int_{t_0}^{t}X(s)^{-1}b(s)ds$$

$$+b(t).$$

$=A(t)u(t)+b(t)$ をみたすから． □

(iii) 定数係数線形微分方程式

$A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$；$n\times n$ 実定数行列．

$$\frac{du(t)}{dt}=Au(t),\quad t\in\mathbb{R}\qquad (**)$$

を考える．

定義 $A\in M_n=\{n\times n$ 行列全体$\}$ に対し（複素定数）

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k \text{ と定める。}$$

（意味をあとで説明する）

注) $\overset{=(a_{ij})}{A} \in M_n$ には、ノルム

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$ を考えて、

$$\|A \cdot B\| \leqq \|A\| \|B\| \quad ({}^{\forall}A, B \in M_n)$$

が成り立つ.

∵) $C = AB = (c_{ij})$ とすると

$$|c_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right|$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2}.$$

$$\therefore \quad |c_{ij}|^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} |b_{\ell j}|^2\right).$$

$$\therefore \quad \underset{\|C\|^2}{\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} |c_{ij}|^2}} \leqq \underset{= \|A\|^2 \|B\|^2}{\underbrace{\left(\sum_{i,k} |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{j,\ell} |b_{\ell j}|^2\right)}}$$ となる. $\boxed{//}$

よって $\|A^2\| \leqq \|A\|^2$,

一般に $\|A^k\| \leqq \|A\|^k \quad ({}^{\forall}k \in \mathbb{N})$.

$S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k$ とするとき. $S_N \in M_n$ で

$N>M$ として

$$\|S_N - S_M\| = \left\|\sum_{k=M+1}^{N} \frac{1}{k!} A^k\right\|$$

$$\leqq \sum_{k=M+1}^{N} \frac{1}{k!} \|A^k\| \leqq \sum_{k=M+1}^{N} \frac{(\|A\|)^k}{k!}$$

$$\leqq \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\|A\|)^k \to 0$$

$$(M, N \to \infty)$$

注 $e^{\|A\|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\|A\|)^k$ $< +\infty$

M_n は $\mathbb{C}^{n\times n}$ と同一視できて、$\mathbb{C}^{n^2}$ は、完備であることから、ある $S \in M_n$ があって、

$$\|S_N - S\| \to 0 \ (N \to \infty)$$ となる。

この S を $S = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ とかいく。 ☒

例 ・ $e^{O} = I_n$: 単位行列

・ $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 対角行列なら

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$ なので

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

。一般の $A \in M_n$ に対し，$\exists S \in M_n$ で (S は正則行列) があって，

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J_1 & O & O & O \\ O & J_2 & O & O \\ O & O & \ddots & O \\ O & O & O & J_k \end{pmatrix}$$

とかける。ここで 各 J_i ($i=1, \dots, k$) は $n_i \times n_i$ 行列で ($\sum n_i = n$),

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda_i \end{pmatrix} \leftarrow \text{Jordan ブロック という}$$

(λ_i は A の固有値)

の形をしたものである。

<u>命題20</u> 上の Jordan 標準形をもつ $A \in M_n$ に対し，

$$e^A = S e^{S^{-1}AS} S^{-1}$$
$$= S \begin{pmatrix} e^{J_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & e^{J_k} \end{pmatrix} S^{-1}$$

$\because$ $(S^{-1}AS)^k = S^{-1}A^k S$ なので

$$e^{S^{-1}AS} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(S^{-1}AS)^k = S^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\right)S = S^{-1}e^A S$$

命題21

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA}.$$

∵ $$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k.$$

$$\therefore \frac{d}{dt} e^{tA} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k t^{k-1} A^k$$

$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^{k-1}$$

$$= A\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} t^l A^l\right) = Ae^{tA}$$

各成分で微分すればよいが各成分は収束半径$+\infty$のべき級数なので項別微分してよい

となる. $\square$

定理22 $X(t) = e^{tA}$ は $\dfrac{du(t)}{dt} = Au(t)$ の基本解行列であり,

初期条件 $u(t_0) = x_0$ の解は

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$$ で与えられる。

注 e^{tA} のことを e^{At} ともかく.

補題23 $A, B \in M_n$ で $AB = BA$ ならば $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ が成立.

(証) まず $AB^2 = (AB)B = (BA)B = (B)(BA)$
$= B^2A$, (仮定より)

一般に $AB^k = B^kA \quad (\forall k \in \mathbb{N})$.

$\therefore Ae^B = e^BA$ をうる。

今, $X(t) = e^{t(A+B)}$, $Y(t) = e^{tA} \cdot e^{tB}$

とおくと $\dfrac{dX(t)}{dt} = (A+B)e^{t(A+B)} = (A+B)X(t)$,

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{tA})e^{tB} + e^{tA}\frac{d}{dt}(e^{tB})$$
$$= Ae^{tA} \cdot e^{tB} + \underbrace{e^{tA}B}_{= Be^{tA}} e^{tB}.$$
$$= (A+B)Y(t)$$ となる.

それ共に $X(0) = I_n$, $Y(0) = I_n$ より

初 $\dfrac{dZ(t)}{dt} = (A+B)Z(t)$, $Z(0) = I_n$ の 解の一意性から

$X(t) = Y(t)$ となる.

∴ 特に $t=1$ として $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ //

系24
$$e^{-A} = (e^A)^{-1} \quad ({}^\forall A \in M_n).$$

∵
$$e^A \cdot e^{-A} = e^O = I_n.$$

系25
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_k + N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & 0 \end{pmatrix}$$

$k \times k$ 行列

に対して
$$e^J = e^\lambda \left(I_k + N + \frac{1}{2!} N^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} N^{k-1} \right).$$

特に
$$e^{tJ} = e^{\lambda t} \left(I_k + tN + \frac{t^2}{2!} N^2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^{k-1} \right).$$

∵
$$e^J = e^{\lambda I_k + N} = \underbrace{e^{\lambda I_k}}_{= e^\lambda I_k} \cdot e^N$$
$$= e^\lambda e^N = e^\lambda \left(I_k + N + \frac{N^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} N^{k-1} \right).$$

(∵ $N^k = O$.) □

命題 26

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + b(t) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

の解は

$$u(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)\,ds.$$

とかける。

(証) $X(t) = e^{tA}$ が基本解行列なので

$$X(t)X(t_0)^{-1} = e^{tA}(e^{t_0A})^{-1} = e^{tA}e^{-t_0A} = e^{(t-t_0)A},$$

同様に $X(t)X(s)^{-1} = e^{(t-s)A}$ となるから。 $\Box$

定理 27 $A \in M_n$：実定数行列で，すべての固有値の実部が負であるとするとき，ある定数 $C, d > 0$ があって

$$\|e^{tA}\| \leqq Ce^{-dt} \quad (t > 0)$$

が成り立つ。

(証)

$$e^{tA} = S\begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_k} \end{pmatrix}S^{-1}$$

とかける。

また、各 J_i に対し $\exists k$ s.t.

$$e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t}\left(I + tN + \frac{t^2}{2!}N^2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}N^{k-1}\right)$$

とかける。ここで λ_i は A のある固有値.

仮定より $\exists d > 0$ s.t.

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i \leqq -2d \quad (\forall i)$$

となる。

また、$\forall m \in \mathbb{N}$ に対し、$e^{-dt}|t|^m \leqq \exists C_m < \infty$

$(\forall t \geqq 0.)$

$$\therefore \|e^{tJ_i}\| \leqq e^{\mathrm{Re}(\lambda_i)t}\left\{\|I\| + |t|\|N\| + \cdots + \frac{|t|^{k-1}}{(k-1)!}\|N^{k-1}\|\right\}$$

$$\leqq \exists C \cdot C_m e^{-dt} \quad (\forall t \geqq 0)$$

となる。

よって $\|e^{tA}\| \leqq \exists M e^{-dt} \quad (\forall t \geqq 0)$

となることがわかる. □

※ $A \in M_n$ のすべての固有値の実部が負であるとき. A を安定行列と呼ぶこともある。