§3 解の有限時間爆発と時間大域解

例

$$\frac{du}{dt} = u^2,\quad u(0) = a > 0.$$

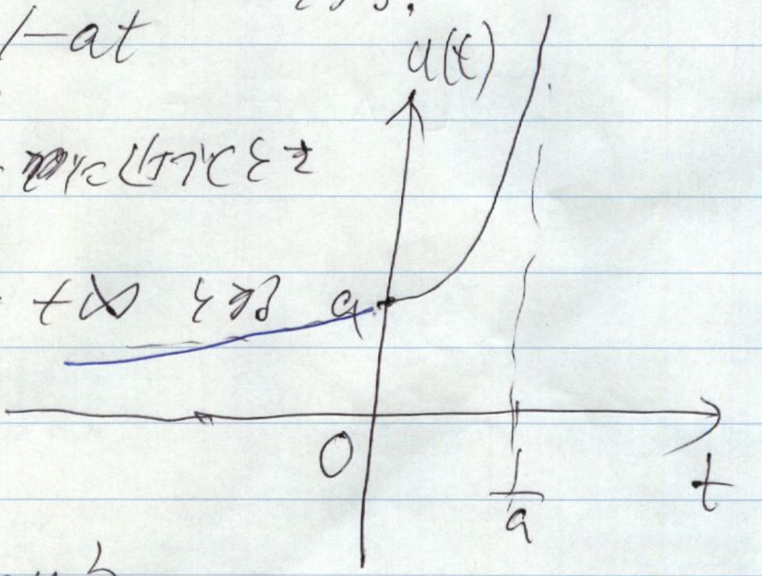
変数分離形：$\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = \int dt$ より

$$-\frac{1}{u(t)} = t + C. \qquad u(0) = a > 0 \text{ より}$$

$$-\frac{1}{a} = C.$$

$$\therefore -\frac{1}{u(t)} = t - \frac{1}{a} = \frac{at-1}{a}$$

$$\therefore u(t) = \frac{a}{1-at} \text{ となる.}$$



これは $t = t^* = \dfrac{1}{a}$ 側に近づくとき

$$\lim_{t \to t^*} u(t) = +\infty \text{ となる}$$

こうした現象を

有限時間爆発という

$t<0$ ではいつでも解となるので 解の最大存在区間は

$\left(-\infty, \dfrac{1}{a}\right)$ となる。

$f : D = \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R}^n$ が連続で

$E \subset \mathbb{R}^n$ の領域.

x に関し局所リプシッツ条件をみたすとする.

$$
(*)\quad \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)), & t \in I \\ u(t_0) = x_0. & \end{cases}
$$

t_0 を含む区間.

は, ある区間 $I = [-a + t_0, t_0 + a]$ $(a > 0)$ が存在して, 唯1つの解をもつことを学んだ。.

(*) の解が存在するような最大の区間 I のことを (*) の解の最大存在区間という.

命題 8 解の最大存在区間 J が存在して,
開区間 $J = (\alpha, \beta)$ とかける.
($\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$ のこともある)

(:) まず ある $a > 0$ が存在して (*) は唯1つの解 $u(t)$ ($= u(t; t_0, x_0)$ とかく) を $I = [-a + t_0, t_0 + a]$ 上でもつ。 このとき $x_1 = u(t_0 + a; t_0, x_0)$ とおく とするとき.

$(t_1, x_1) \in \mathbb{R} \times E$ なので　また 局所的解の

一意存在定理から　$u(t_1) = x_1$ なる ㊟の解

$u(t; t_1, x_1)$ が唯1つ存在する．

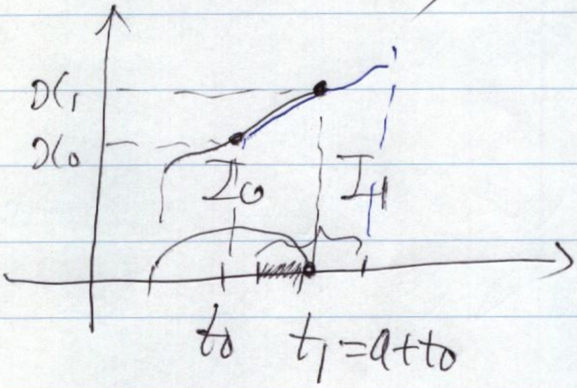
ある $a_1 > 0$ があって $[-a_1 + t_1, t_1 + a_1]$ 上で．

このとき，共通区間 $(I_0 =) [-a + t_0, t_0 + a] \cap (I_1 =) [-a_1 + t_1, t_1 + a_1]$

では，共に初期条件

$u(t_1) = x_1$ をみたす

解として，一意性より



$u(t; t_0, x_0) = u(t; t_1, x_1)$

$(\forall t \in I_0 \cap I_1)$

となることに注意する．

このようにして $u(t) = \begin{cases} u(t; t_0, x_0) & , t \in I_0 \\ u(t; t_1, x_1) & , t \in I_1 \end{cases}$

は $I_0 \cup I_1$ 上での解として拡張されることになる．

この操作をつづけることで最大存在区間 J が唯1つできることになる。

・ $\boxed{J \text{ が開区間であること：}}$

∵ もし $J = (\alpha, \beta]$，β は有限 とするとしたら，

E：開より，$y_0'' u(\beta) \in E$ となることになり

また $u(\beta) = y_0$ として、ある $b>0$ があって、

解は $t<\beta+b$ まで延長できることになり、

Jが最大存在区間であることに反する。 $\boxed{\text{≦}}$

同様に ある $\alpha\ (>-\infty)$ に対し、$J=[\alpha, \beta)$ となることもない。

結局、$J=(\alpha, \beta)$ とかけることになる。$\boxed{\text{□}}$

定理9 $J=(\alpha,\beta)$ を (*) の解の最大存在区間とする。このとき、もし $\beta<+\infty$ ならば：

任意のコンパクト集合 $K\subset E$ に対して、

~~~~ $u(t_1)\notin K$ となるような $t_1\in[t_0,\beta)$ が存在する。

(同様に もし $\alpha>-\infty$ ならば、任意のコンパクト集合 $K\subset E$ に対し、$\exists t_1\in(\alpha, t_0]$ s.t. $u(t_1)\notin K$.)

proof. $\beta<+\infty$ として、結論が成り立たないとすると、$\exists$ コンパクト集合 $K_0\subset E$ s.t.

$u(t)\in K_0\quad (\forall t\in[t_0,\beta))$ となる。

このとき $M=\max_{(t,x)\in[t_0,\beta]\times K_0}\|f(t,x)\|<\infty$ とすると

$$u(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\,ds,\quad t\in[t_0,\beta) \text{ で}$$
~~~~

$t_0 \leqq t_1 < t_2 < \beta$ に対し

$$\|u(t_1)-u(t_2)\| \leqq \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\|f(s,u(s))\|}_{\leqq M} ds.$$

$$\leqq M|t_2-t_1|$$

となる。

よって　$t_j \to \beta$ する $(t_j<\beta)$ 列 $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ に対し.

$$\|u(t_j)-u(t_k)\| \leqq M|t_j-t_k| \to 0. \quad (j,k\to\infty)$$

かつ　$u(t_j) \in K_0$　$({}^\forall j)$

∴ $\{u(t_j)\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ はコーシー列となるので ${}^\exists x_1 \in \mathbb{R}^n$ s.t.

$$\|u(t_j)-x_1\| \to 0 \quad (j\to\infty).$$

K_0 がコンパクトなので $x_1 \in K_0$ でもある。

また $u(t_j) = x_0 + \int_{t_0}^{t_j} f(s,u(s))ds$ で $j\to\infty$ とし

$$x_1 = x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{\beta} f(s,u(s))ds}$$ となる.

∴ ~~$u(\beta) \equiv x_1$ とおくと~~. ↑積分のとり方によらず定まる.

よって　$u(t) \to x_1$　$(t\to\beta)$ となる。

∴ $u(\beta)=x_1$ とおくと. u は $[t_0,\beta]$ でも連続となり

⊛ を $t\in[t_0,\beta]$ でみたし. 初期条件 $u(\beta)=x_1$

とみなす解が、ある $b>0$ があって $t<\beta+b$ まで
延長できることになる。これは $J=(\alpha,\beta)$ が
最大存在区間であったことに矛盾する。 $\square$

系10　$\beta<+\infty$ ならば $\lim_{t\to\beta} u(t)$ が存在しないか、
又は $\lim_{t\to\beta} u(t) \in \partial E$ となる。

(∵)　もし $\lim_{t\to\beta} u(t)$ が存在したとしたら、
$u(t)\in E$ $(\forall t\in[t_0,\beta))$ なので $\lim_{t\to\beta} u(t)$ は E の
内点か又は ∂E の点になる。

$\lim_{t\to\beta} u(t) \in E$ とすると、$\exists K$: コンパクト $\subset E$ s.t.
$u(t)\in K$ $(\forall t\in[t_0,\beta))$ となることになり、
上の定理に反する。∴ $\lim_{t\to\beta} u(t) \in \partial E$ $\square$

系11　$E=\mathbb{R}^n$ のとき、~~$\beta<+\infty$ なら~~ $\sup_{t\in[t_0,\beta)}\|u(t)\|<+\infty$
ならば $\beta=+\infty$ となる。

(ii) $\sup_{t\in[t_0,\beta)} \|u(t)\| \leq {}^{\exists}M < \infty$ とする。

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds \text{ で}$$

もし、$\beta < +\infty$ とすると。 $\widehat{M} = \max_{(t,x)\in[t_0,\beta]\times B(0,M)} \|f(s,x)\| < \infty$

として

$t_0 < t < t' < \beta$ で

$$\|u(t') - u(t)\| = \left\| \int_{t}^{t'} f(s, u(s))\,ds \right\|$$

$$\leq \widehat{M}\,|t' - t|.$$

となることから $\lim_{t\to\beta} u(t)$ が存在することになる。

これは矛盾。 $\therefore\ \beta = +\infty$ となる $\square$

<u>系12</u> $E = \mathbb{R}^n$ で、${}^{\forall}T > 0$ に対し ${}^{\exists}L_T > 0$ s.t.

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L_T \|x - y\|$$

$$({}^{\forall}t, |t| \leq T,\ {}^{\forall}x, y \in \mathbb{R}^n)$$

をみたすとする。

このとき、$\beta = +\infty$. ($\alpha = -\infty$ も).

特に 連続な成分をもつ $A(t)$: $n\times n$ 行列に対し

$\dfrac{du}{dt} = A(t)u$, $u(t_0) = x_0$ は時間大域解をもつ.

(い) $\beta < +\infty$ とする。 $\left(T = |t_0| + |\beta| < \infty \text{ とする} \right)$

$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$ より

$$\|u(t)\| \leqq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s)) - f(s, 0)\|\, ds + \int_{t_0}^{t} \|f(s, 0)\|\, ds.$$

$$\leqq \underbrace{\|x_0\| + M_0 (\beta - t_0)}_{C \text{ とおく。}} , \quad \left(M_0 = \max_{t_0 \leq t \leq \beta} \|f(t, 0)\| < \infty \right)$$

$$+ L_T \int_{t_0}^{t} \|u(s)\|\, ds \quad \left({}^{\forall} t_0 \leqq t < \beta \right)$$

となる。

∴ Gronwallの不等式より

$$\|u(t)\| \leqq C e^{\int_{t_0}^{t} L_T\, ds}$$

$$\leq C e^{L_T(\beta - t_0)} \equiv K < \infty$$

$$\left(t_0 \leqq {}^{\forall} t < \beta \right)$$

となる。

∴ $\beta + \infty$ となる。

<u>系13</u> $E = \mathbb{R}^n$. $\|f(t, x)\| \leqq {}^{\exists} M \; \left({}^{\forall} t \in \mathbb{R}, {}^{\forall} x \in \mathbb{R}^n \right)$

ならば $\beta = +\infty$.

∵

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds \text{ で…}$$

$\beta < \infty$ とすると

$$\|u(t)\| \leqq \|x_0\| + M(\beta - t_0)$$
$$\equiv K < \infty \quad (t_0 \leqq t < \beta)$$

となるから、矛盾。

例1
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{u}{1+u^2+v^2}, & u(0) = a > 0 \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{v}{1+u^2+v^2}, & v(0) = b > 0 \end{cases}$$

は $f_1(u,v) = \dfrac{u}{1+u^2+v^2}$, $f_2(u,v) = -\dfrac{v}{1+u^2+v^2}$

とおくとき、$|u| \leqq \frac{1}{2}(1+u^2)$, $|v| \leqq \frac{1}{2}(1+v^2)$ $(\forall u, v \in \mathbb{R})$

から $|f_1(u,v)| \leqq \frac{1}{2}$, $|f_2(u,v)| \leqq \frac{1}{2}$ となる。

よって 系16より 時間大域解を唯一つもつ。

例2
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u - u^3 - v, & u(0) = a > 0 \\ \dfrac{dv}{dt} = u - v, & v(0) = b > 0. \end{cases}$$

今解 $(u(t), v(t))$ が $0 \le t < {}^\exists T$ で存在するとしよう。

$$\frac{d}{dt}\{u(t)^2+v(t)^2\} = 2uu' + 2vv'$$

$$= 2u\{u-u^3-v\} + 2v(u-v)$$

$$= 2u^2 - 2u^4 - 2v^2$$ となる。 ①

ここで $2t^2 \le t^4+1 \quad ({}^\forall t)$ より

$(\because \quad 2ab \le a^2+b^2)$

$$4u^2 \le 2u^4+2.$$

$$\therefore 2u^2 \le -2u^2+2u^4+2$$

これを①に代入して $z(t) \equiv u^2(t)+v^2(t)$ として

$$\frac{dz(t)}{dt} \le -2z(t)+2 \quad (0 \le t < T)$$

となる $\therefore \left(e^{2t}z(t)\right)' \le 2e^{2t}.$

$$\therefore e^{2t}z(t) - z(0) \le 2\int_0^t e^{2s}ds = e^{2t}-1$$

となる。

$$\therefore \overset{u^2(t)+v^2(t)}{z(t)} \leq z(0)e^{-2t} + 1 - e^{-2t}$$

$$\leq 1+z(0) \quad (0 \leq {}^{\forall}t < T)$$

となる.

$\therefore$ 最大存在区間を $[0, \beta)$ とすれば.

$\beta < +\infty$ ならば $u^2(t)+v^2(t) \leq 1+z(0)$

$(0 \leq t < \beta)$

となるので 系11に矛盾する.

$\therefore$ 時間大域解をもつ.