2012.10.10

§2. Gronwallの不等式, 初期値に関する連続性など

補題5 (Gronwall)

$g, k : [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続で

かつ $k(t) \geqq 0 \quad (\forall t \in [a,b])$ とする.

今, ある $c \geqq 0$ があって

$$g(t) \leqq c + \int_a^t k(s) g(s) ds \quad (\forall t \in [a,b])$$

とするとき,

$$g(t) \leqq c e^{\int_a^t k(s) ds} \quad (\forall t \in [a,b])$$

が成りたつ.

proof. $G(t) \equiv c + \int_a^t k(s) g(s) ds$ とおくと

仮定より $g(t) \leqq G(t)$ ……(1)

一方 $G'(t) = k(t) g(t)$ より

$k(t) \geqq 0$ と合わせて $G'(t) \leqq k(t) G(t)$ となる

$$\therefore \left(e^{-\int_a^t k(s) ds} G(t) \right)' = e^{-\int_a^t k(s) ds} \left\{ G'(t) - k(t) G(t) \right\} \leqq 0.$$ となる

従って、 a から t まで積分して、$G(a)=c$ より

$$e^{-\int_a^t h(s)ds} G(t) - c \leqq 0.$$

$$\therefore \ G(t) \leqq c\, e^{\int_a^t h(s)ds} \ \text{となる}.$$

$$\therefore \ g(t) \leqq G(t) \leqq c\, e^{\int_a^t h(s)ds} \ \text{となる}.$$

$\boxed{}$

$$(*)\ \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)), & t \in I \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

簡単のため $t_0=0$ とする.

$(t_0, x_0) = (0, x_0) \in D$ で $f(t,x)$ は

D で連続かつ, x に関して局所リプシッツ条件

をみたすとする. このとき, $\exists a'>0, \exists \beta>0$ s.t.

$$K \equiv [-a', a'] \times B(x_0, \beta) \subset D.$$

このとき $M = \max\{\|f(t,x)\| \mid (t,x) \in K\}$ として

又 $\exists L>0$ s.t

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqq L\, \|x-y\|$$

$$(\forall (t,x), \forall (t,y) \in K.)$$

このとき、前の証明法より、

$0 < a \leq a'$ かつ $a \leq \dfrac{\beta}{2M}$ かつ $a < \dfrac{1}{L}$

なるよう $a > 0$ を固定する。

このとき、$T_y(u)(t) = y + \int_0^t f(s, u(s))ds$

$\left(y \in B(x_0, \frac{\beta}{2}) \right)$

とおくとき、T_y は、各 $y \in B(x_0, \frac{\beta}{2})$ に対して

$\hat{X} = \{ u \in C(I) \mid \|u(t) - x_0\| \leq \beta \ (\forall t \in I) \}$

$(I = [-a, a])$

において縮小写像となることがわかる。

すなわち、任意の初期値 $y \in B(x_0, \frac{\beta}{2})$ に対し、

共通の区間 $I = [-a, a]$ があって、

$\dfrac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)),\ t \in I$ かつ $u(0) = y$

の解が一意存在することになる。

この解のことを $u(t) = u(t; y)$ とかこう

$(\forall y \in B(x_0, \frac{\beta}{2}))$

このとき，解 $u(t;y)$ の初期値 y に対する連続性が成りたつ．

定理 6

$y, z \in B(x_0, \frac{b}{2})$ に対して，

$$|u(t;y)-u(t;z)| \leqq |y-z| e^{Lt} \quad (\leqq |y-z|e^{La})$$

$$(\forall t \in I = [-a, a])$$

が成りたつ．

proof.

$$u(t;y) = y + \int_0^t f(s, u(s;y))ds$$

とみなす．

$$\therefore |u(t;y)-u(t;z)| \leqq |y-z| + \int_0^t |\underbrace{f(s,u(s;y)) - f(s, u(s;z))}_{\leqq L|u(s;y)-u(s;z)|}| ds$$

$$(\forall t \in [0, a])$$

とみなす．

［注］Gronwall の不等式より

$$|u(t;y)-u(t;z)| \leqq |y-z| \cdot e^{\int_0^t L ds}$$

$$= |y-z| e^{Lt} \quad (\forall t \in [0,a]).$$

※ $t \in [-a, 0]$ に対しても同様．

□

⑥ パラメータ λ に関する連続性

$f(t,x;\lambda)$ が パラメータ $\lambda\in\Lambda$ (コンパクト)

を含めて $(t,x,\lambda)\in D\times\Lambda$ で連続とし、

$\lambda\in\Lambda$ に関して、一様な局所リプシッツ条件
(xに関する)

をみたすとする。 i.e.

$$K\equiv[-a',a']\times B(x_0,\rho)\subset D,$$

$$M=\max\{\|f(t,x;\lambda)\| \mid (t,x,\lambda)\in K\times\Lambda\}$$

$$\|f(t,x;\lambda)-f(t,y;\lambda)\|\leq {}^{\exists}L\,\|x-y\|$$

$$({}^{\forall}(t,x,\lambda),(t,y,\lambda)\in K\times\Lambda)$$

とする。

<u>定理7</u> 以上の下で(ある $a>0$ が存在して) ${}^{\forall}y\in B(x_0,\frac{\rho}{2})$, ${}^{\forall}\lambda\in\Lambda$

に対して

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}=f(t,u(t);\lambda), & t\in I=[-a,a].\\ u(0)=y\end{cases}$$

は唯1つの解 $u(t)$ $(=u(t;y,\lambda)$ とかこう$)$

をもち、次が成りたつ: ${}^{\forall}\varepsilon>0$ に対し ${}^{\exists}\delta(\varepsilon)>0$ s.t.

$$|\mu-\lambda|<\delta \Rightarrow |u(t;y,\lambda)-u(t;y,\mu)|\leq\varepsilon a e^{La}$$

$$({}^{\forall}t\in I,\ {}^{\forall}y\in B(x_0,\tfrac{\rho}{2}),\ \lambda,\mu\in\Lambda)$$

proof.

$$u(t;y,\lambda) = y + \int_0^t f(s, u(s;y,\lambda);\lambda)\,ds$$

より

$$|u(t;y,\lambda) - u(t;y,\mu)|$$

$$\leq \int_0^t \underbrace{|f(s,u(s;y,\lambda);\lambda) - f(s,u(s;y,\mu);\mu)|}_{\wedge|}\,ds$$

$$|f(s,u(s;y,\lambda);\lambda) - f(s,u(s;y,\lambda);\mu)|$$

$$+ |f(s,u(s;y,\lambda);\mu) - f(s,u(s;y,\mu);\mu)|\,ds.$$

となるが、

ここで $f(t,x;\lambda)$ の $K \times \bar{\Lambda}$ 上での一様連続

性から $\forall \varepsilon > 0$ に対し、 $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$: s.t.

$$|\lambda - \mu| < \delta \Rightarrow |f(s,x;\lambda) - f(s,x;\mu)| < \varepsilon.$$

$$(\forall (s,x,\lambda), (s,x,\mu) \in K \times \bar{\Lambda})$$

よって、

$$|u(t;y,\lambda) - u(t;y,\mu)|$$

$$\leq \varepsilon a + L\int_0^t |u(s;y,\lambda) - u(s;y,\mu)|\,ds.$$

従って Gronwall の不等式より

$$|u(t;y,\lambda) - u(t;y,\mu)| \leq \varepsilon a\, e^{Lt} \quad (\forall t \in I)$$

となる。 $\boxtimes$

(注) さらに $f(t,x)$ が x に関し C^1 級なら，

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)), \quad t \in I, \quad u(0) = y$$

の解 $u(t;y)$ は y に関して C^1 級となり

$$\Phi(t) = D_y u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$ とおくとき，

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = Df(t, u(t))\,\Phi(t), \quad \Phi(0) = I_n$$
単位行列

をみたすことになる。