(11) 境界値問題の可解性

境界値問題（フレドホルムの交代定理）

(#) $\begin{cases} \varphi''(x) + q(x)\varphi(x) = h(x), & a<x<b \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \end{cases}$

を考える。q, h は $[a,b]$ 上で与えられた連続関数。

今、初期条件 $\varphi(a)=0$, $\varphi'(a)=1$ での

$$\varphi'' + q\varphi = 0, \quad a<x<b \quad \cdots(1)$$

なる解を $u(x)$ とし、

初期条件 $\varphi(b)=0$, $\varphi'(b)=1$ での

(1) の解を $v(x)$ とする。

補題50 u と v が 1次独立

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \varphi'' + q\varphi = 0, & a<x<b \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \end{cases} \cdots(*)$

なる $\varphi(x)$ は $\varphi(x)=0$ のみ。

（すなわち、0 は固有値でない）

(ii) ($\Rightarrow$)

$$\begin{cases} \varphi'' + q\varphi = 0, & a < x < b \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \end{cases}$$

として. $\varphi \equiv 0$ を示す。

仮に $\varphi \not\equiv 0$ とすると. $\varphi'(a) \neq 0$. ∴

$$\varphi(x) = \varphi'(a)u(x) \quad \text{となる。}$$

∵) $\varphi(a) = 0$, $\varphi'(a)u(a) = 0$.

かつ $\varphi'(a) = (\varphi'(a)u)'(a) = \varphi'(a)\underbrace{u'(a)}_{1}$

又 $\varphi(x)$ も $\varphi'(a)u(x)$ も (1) をみたすので

初期値問題の解の一意性より $\varphi(x) = \varphi'(a)u(x)$ $(a < x < b)$

となる。 $\boxtimes$

同様に $\varphi'(b) \neq 0$ であり, $\varphi(x) = \varphi'(b)v(x)$

も成りたつ。これより

$$\varphi'(a)u(x) = \varphi'(b)v(x)$$

となるが; u と v が1次独立であることに矛盾.

∴ $\varphi(x) \equiv 0$ となる。

($\Leftarrow$)

u と v が1次従属なら. $u(x) = {}^{\exists}k\,v(x)$ となるが.

$u(a) = u(b) = 0$, $u \not\equiv 0$ となって 仮定に反する $\boxtimes$

このとき、ロンスキアン

$$W = u'v - uv' = -定 \neq 0.$$

となることに注意して

$$Y(x) = -\frac{1}{W}\left\{u(x)\int_x^b h(t)v(t)dt + v(x)\int_a^x h(t)u(t)dt\right\} \quad \text{—①}$$

とおくと、

$$Y'(x) = -\frac{1}{W}\left\{u'\int_x^b h(t)v(t)dt + v'(x)\int_a^x h(t)u(t)dt \right.$$

$$\left. \cancel{- u(x)h(x)v(x)} + \cancel{v(x)h(x)u(x)}\right\}$$

$$= -\frac{1}{W}\left\{u'\int_x^b h(t)v(t)dt + v'(x)\int_a^x h(t)u(t)dt\right\} \quad ②$$

さらに

$$Y''(x) = -\frac{1}{W}\left\{\underset{-qu}{\underset{\shortparallel}{u''}}\int_x^b h(t)v(t)dt + \underset{-qv}{\underset{\shortparallel}{v''}}\int_a^x h(t)u(t)dt \right.$$

$$\left. \underbrace{-u'hv + v'hu}_{\substack{\shortparallel \\ -h(x)W}}\right\}$$

$$= -q\,Y(x) + h(x)$$ となる。

∴ $Y(x)$は $\varphi'' + q\varphi = h$ の1つの特殊解

である。さらに 今の場合.

① と $u(a)=0,\ v(b)=0$ より

$$Y(a)=Y(b)=0 \quad \text{をみたす.}$$

よって $Y(x)$ は, 境界値問題

$$\text{(\#)}\begin{cases} \varphi''+q\varphi=h, & a<x<b \\ \varphi(a)=\varphi(b)=0 \end{cases}$$

の解を与えている。

定理 51 (*) の条件の下で; 境界値問題 (\#) は 任意の h に対して 唯1つの解 $\varphi(x)$ をもつ.

(∵) 解の存在は, 上に示したとおりである。

一意性 を示そう. $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$ が共に (\#) の解とすると $w(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ として

$$\begin{cases} w''+qw=0, & a<x<b \\ w(a)=w(b)=0 \end{cases}$$

をみたすことになるが (*) より $w(x)\equiv 0$.

$$\therefore\ \varphi_1(x)=\varphi_2(x) \quad \text{となる.} \qquad \text{□}$$

上の証明で，解の表現 ① より

㊟

$$G(x,t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{W}u(x)v(t), & a\leqq x\leqq t\leqq b\\ -\dfrac{1}{W}u(t)v(x), & a\leqq t\leqq x\leqq b.\end{cases}$$

とおくと．

$$y(x)=\int_a^b G(x,t)f(t)\,dt$$

とかける。この $G(x,t)$ を ㊟ の Green関数（グリーン）という。

㊟ 境界条件がちがっていても，同様の結果が成り立つ．例えば，

$$\begin{cases}\varphi''+q\varphi=0, & a<x<b\\ \varphi(a)=0,\ \varphi'(b)=0\end{cases}$$

なる解は $\varphi(x)\equiv 0$ のみであるとする．

$\varphi(a)=0$，$\varphi'(a)=1$，$\varphi''+q\varphi=0$ の解を $u(x)$．

$\varphi(b)=1$，$\varphi'(b)=0$，$\varphi''+q\varphi=0$ の解を $v(x)$

とりて．$W=u'v-uv'$（＝一定値）を用いて

$$y(x)=\int_a^b G(x,t)h(t)\,dt$$ は

$$\begin{cases} \varphi''+q\varphi=h, & a<x<b \\ \varphi(a)=0, \quad \varphi'(b)=0 \end{cases}$$

の唯1つの解を与える。ここで Green関数 $G(x,t)$は ⊛で定義されるもの。

__定理52__

$$\begin{cases} \varphi''+q\varphi=0, & a<x<b \\ \varphi(a)=\varphi(b)=0 \end{cases}$$

なる $\varphi_0(x)\not\equiv 0$ が存在するならば

$$\begin{cases} \varphi''+q\varphi=h(x), & a<x<b \\ \varphi(a)=\varphi(b)=0 \end{cases} \quad \cdots(*)$$

が解をもつための必要十分条件は

$$\int_a^b h(x)\varphi_0(x)\,dx=0$$

をみたすことである。

proof

① (※)が解をもつとすると、方程式に $\varphi_0(x)$ をかけて積分すると

$$\int_a^b (\varphi'' + g\varphi)\varphi_0 \, dx = \int_a^b h\varphi_0 \, dx.$$

$$(\text{左辺}) = [\varphi'\varphi_0]_a^b - \underbrace{\int_a^b \varphi'\varphi_0'}_{\displaystyle [\varphi\varphi_0']_a^b - \int_a^b \varphi\varphi_0''} + \int_a^b g\varphi\varphi_0 \, dx.$$

↑ 部分積分

$$= \underbrace{[\varphi'\varphi_0 - \varphi\varphi_0']_a^b}_{} + \int_a^b (\underbrace{\varphi_0'' + g\varphi_0}_{=0})\varphi \, dx.$$

$$\varphi'(b)\underset{0}{\varphi_0(b)} - \varphi(b)\underset{0}{\varphi_0(b)} - (\varphi'(a)\underset{0}{\varphi_0(a)} - \varphi(a)\underset{0}{\varphi_0(a)}) = 0 \text{ となる}$$

$\therefore \int_a^b h\varphi_0 \, dx = 0$ が成立しなくてはならない。

② 逆に $\int_a^b h\varphi_0 \, dx = 0$ をみたすとしよう。

このとき $\varphi'' + g\varphi = 0, \quad a < x < b$

の解で φ_0 と1次独立なものを $\varphi_1(x)$ とし、

このとき $z(x) = \frac{1}{K}\left\{ \cancel{x}\,\varphi_0(x)\int_a^x h(t)\varphi_1(t)dt + \varphi_1(x)\int_x^b h(t)\varphi_0(t)dt \right\}$

$\left(\text{ただし}.\ K = \varphi_0'(x)\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\varphi_1'(x)\ (= \text{一定} \neq 0) \right)$

とおくと、

$$z'(x) = \frac{1}{K}\left\{ \varphi_0'(x)\int_a^x h(t)\varphi_1(t)dt + \varphi_1'(x)\int_x^b h(t)\varphi_0(t)dt + \cancel{\varphi_0(x)h(x)\varphi_1(x)} - \cancel{\varphi_1(x)h(x)\varphi_0(x)} \right\},$$

$$z''(x) = \frac{1}{K}\left\{ \underset{-q\varphi_0(x)}{\underset{\shortparallel}{\varphi_0''(x)}}\int_a^x h(t)\varphi_1(t)dt + \underset{-q\varphi_1(x)}{\underset{\shortparallel}{\varphi_1''(x)}}\int_x^b h(t)\varphi_0(t)dt + \underbrace{\varphi_0'(x)h(x)\varphi_1(x) - \varphi_1'(x)h(x)\varphi_0(x)}_{\shortparallel \atop K h(x)} \right\}$$

$= -q\,z(x) + h(x)$ となる。

$\therefore\ \varphi'' + q\varphi = h$ の一般解は

$\varphi(x) = C_0\varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + z(x)$

とかける。 $\varphi(a) = 0$ とみたすには

$$C_0\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\underbrace{\varphi_0(a)}} + C_1\varphi_1(a) + z(a) = 0 \quad \because\ z(a) = \frac{1}{K}\varphi_1(a)\int_a^b h(t)\varphi_0(t)dt$$

$\therefore\ c_1\varphi_1(a) + \cancel{\ \ } = 0$. となるが

$\varphi_1(a) \neq 0$ $\left(\because\ K = \varphi_0'(a)\underset{0}{\varphi_1(a)} - \underset{0}{\varphi_0(a)}\varphi_1'(a)\right.$

なので　　$\left.= 0\ となってしまう.\right)$

$c_1 = 0$ となる。

$\varphi(b) = 0$ をみたすには

$$c_0\underset{0}{\varphi_0(b)} + \frac{1}{K}\underset{0}{\varphi_0(b)}\int_a^b h(t)\varphi_1(t)\,dt = 0.$$

より、任意の c_0 でよい。

以上より

$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + Z(x)$　(c_0 は任意)

は解となる。　$\boxed{\text{Q.E.D.}}$

以上のことを一般化すると次の定理を得る。

固有値問題

$$\begin{cases} \varphi'' + g\varphi + \lambda\varphi = 0, & a < x < b \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 & \end{cases}$$

の固有値の列　$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty$

と付随する固有関数の列を $\{\varphi_n(x)\}$ とする。

i.e.
$$\begin{cases} \varphi_n'' + q\varphi_n + \lambda_n \varphi_n = 0, \quad a<x<b \\ \varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0 \end{cases}$$

<u>定理 5.3</u>

(i) $\lambda \neq \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ なるとき、$\forall h \in C[a,b]$ に対し

境界値問題
$$\begin{cases} \varphi'' + q\varphi + \lambda\varphi = h, \quad a<x<b \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \end{cases} \quad \cdots (\#)$$

は、唯1つの解 $\varphi(x)$ をもつ。

(ii) ある n に対し、$\lambda = \lambda_n$ の場合は、

境界値問題 (#) が解をもつための必要十分条件は
$$\int_a^b h(x)\varphi_n(x)\,dx = 0$$

をみたすことである。

(以上を、<u>フレドホルム (Fredholm) の交代定理</u>という。)

例

$$\begin{cases} \varphi''(x) = h(x), & 0<x<1 \\ \varphi(0)=\varphi(1)=0 \end{cases}$$

のグリーン関数を求めてみよう.

まず

$$\begin{cases} \varphi''(x) = 0, & 0<x<1 \\ \varphi(0)=\varphi(1)=0 \end{cases}$$

なる φ は $\varphi \equiv 0$ しかないことを確める.

方程式に φ をかけて積して

$$\int_0^1 \varphi''(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

$$\underbrace{[\varphi'\varphi]_0^1}_{0} - \int_0^1 (\varphi')^2\,dx.$$

$\therefore \int_0^1 (\varphi')^2\,dx = 0$ より $\varphi' \equiv 0$, $\therefore \varphi(x) =$ 定数

$\varphi(0)=\varphi(1)=0$ より $\varphi(x)\equiv 0$ となる.

$u(x)$ を $u''(x)=0$, $u(0)=0$, $u'(0)=1$ の解

$v(x)$ を $v''(x)=0$, $v(1)=0$, $v'(1)=1$ の解.

とすると $u(x) = x$, $v(x) = \underset{x-1}{\cancel{1-x}}$ となる。

ロンスキアン $W = u'v - uv' = 1\times(\underset{(x-1)}{\cancel{1-x}}) - x\times(+1) = 1$

$$\therefore G(x,t)=\begin{cases} +x\,\overset{(t-1)}{\cancel{(1-t)}} & 0\le x\le t\le 1 \\ +t\,\underset{(x-1)}{\cancel{(1-x)}}, & 0\le t\le x\le 1. \end{cases}$$

として

$$\varphi(x)=\int_0^1 G(x,t)\,h(t)\,dt \quad \text{が}$$

$$\begin{cases} \varphi''(x)=h(x), & 0<x<1 \\ \varphi(0)=\varphi(1)=0 \end{cases}$$

の唯1つの解を与える。

例

$$\begin{cases} \varphi''+\lambda\varphi=0, & 0<x<1 \\ \varphi(0)=\varphi(1)=0 \end{cases}$$

の固有値は $\lambda=\lambda_n=(n\pi)^2 \ (n=1,2,\cdots)$

固有関数は $\varphi_n(x)=\sin(n\pi x)$. となる.

例えば

$$\begin{cases} \varphi''+\pi^2\varphi=h(x), & 0<x<1 \\ \varphi(0)=\varphi(1)=0 \end{cases}$$

が解をもつための条件は $\int_0^1 h(x)\sin(\pi x)\,dx=0$

をみたすことである。

$\varphi_1(x) = \sin(\pi x)$ とは独立な

$$\varphi'' + \pi^2\varphi = 0 \quad , 0 < x < 1$$

の解として $\psi(x) = \cos(\pi x)$ をとる。

このとき $K = \varphi_1'\psi - \varphi_1\psi'$

$$= \pi\cos(\pi x)\cos(\pi x) - \sin\pi x(-\pi)\sin\pi x$$

$$= \pi \quad \text{となる。}$$

$$\therefore Z(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\varphi_1(x)\int_0^x h(t)\psi(t)dt + \psi(x)\int_x^1 h(t)\varphi_1(t)dt\right\}$$

として

$$\varphi(x) = C_0\sin(\pi x) + Z(x) \text{ が}\cdots$$

$$\begin{cases} \varphi'' + \pi^2\varphi = h(x), \ 0 < x < 1 \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

の一般解となる。

(注) $\int_0^1 h(t)\varphi_1(t)dt = 0$ より $\int_x^1 h(t)\varphi_1(t)dt + \int_0^x h(t)\varphi_1(t)dt = 0$

14

$$\therefore\ Z(x) = \frac{1}{\pi}\left\{ \varphi_1(x)\int_0^x h(t)\psi(t)\,dt - \psi(x)\int_0^x h(t)\varphi_1(t)\,dt \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^x h(t)\,\underbrace{\left(\varphi_1(x)\psi(t) - \psi(x)\varphi_1(t)\right)}_{\substack{= \sin\pi x\cos(\pi t) - \cos(\pi x)\sin(\pi t) \\ = \sin\pi(x-t)}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^x \sin\pi(x-t)\,h(t)\,dt$$ となる。

演習問題

問1

$$\begin{cases} \varphi''(x) = h(x), & 0<x<1 \\ \varphi(0)=0, \ \varphi'(1)=0 \end{cases}$$

のグリーン関数を求めよ。

問2

$$\begin{cases} \varphi''(x) - \varphi(x) = h(x), & 0<x<1 \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

のグリーン関数を求めよ.

問3

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \pi^2 \varphi(x) = \cos(\pi x), & 0<x<1 \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

の解はあるか? あるなら解を求めよ。