§9 2階線形微分方程式と境界値問題

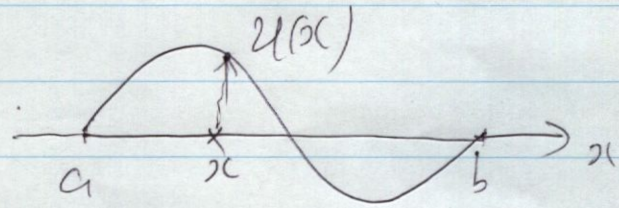
与えられた有界区間 (a,b) と $[a,b]$ 上の連続関数 $g(x)$, $f(x)$ に対して.

$u \in C^2[a,b]$ で

$$(1)\quad \begin{cases} u''(x)+g(x)u(x)=f(x), & a \leq x \leq b, \\ \boxed{u(a)=0, \quad u(b)=0} & \leftarrow \text{境界条件} \end{cases}$$

なるものが存在するか？ 存在するとして一意的に定まるか？

(1)を<u>境界値問題</u>という.



$\left(u'(x) = \dfrac{du}{dx}, \ u''(x) = \dfrac{d^2u}{dx^2} \text{ で表す.} \right)$

$$(2)\quad u''(x)+g(x)u(x)=0, \quad a \leq x \leq b$$

は, 1次独立な解 $u_1(x)$ と $u_2(x)$ (これらを<u>基本解</u>という) を用いて,

一般解 $u(x)=C_1 u_1(x)+C_2 u_2(x)$ をもつ.

(注) $v(x) = u'(x)$ として

$$(2) \iff \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -qu \end{pmatrix}$$ とかける.

命題44 u_1, u_2 が (2) の基本解ならば

そのロンスキアン:

$$z(x) \equiv W(u_1, u_2) \equiv \det\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix}$$

$$= u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)$$

は $z(x) \neq 0$ ($\forall x \in [a, b]$) をみたす.

さらに $z(x) \equiv c$ (一定) が成立する.

($\because$) もし $\exists x_0 \in [a, b]$ で $z(x_0) = 0$ となる

とすると, ベクトル $\begin{pmatrix} u_1(x_0) \\ u_1'(x_0) \end{pmatrix} = \exists k \begin{pmatrix} u_2(x_0) \\ u_2'(x_0) \end{pmatrix}$ となる

このとき $v(x) = u_1(x) - k u_2(x)$ とおくと

$v(x_0) = v'(x_0) = 0$ であって (2) をみたすので

初期値問題の解の一意性より $v(x) \equiv 0$ となる.

$\therefore u_1(x) = k u_2(x)$ となり. u_1, u_2 が1次独立で

あることに反する。 $\therefore z(x) \neq 0$ ($\forall x \in [a, b]$) となる

又 $z'(x) = \left(u_1 u_2' - u_2 u_1'\right)'$

$= u_1 u_2'' - u_2 u_1''$

$= u_1(-q u_2) - u_2(-q u_1) = 0$ となる.

∴ $z(x) =$ 一定 となる $\boxed{}$

(2) 解の振動

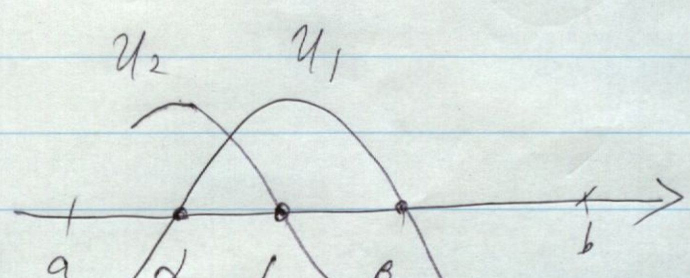
<u>定理45</u> (スツルムの分離定理)

u_1, u_2 を (2) の1次独立な解とする.

$u_1(\alpha) = u_1(\beta) = 0$ $(\alpha < \beta)$ ならば,

ある γ があって, $\alpha < \gamma < \beta$ かつ $u_2(\gamma) = 0$

が成立する。



(∵) $u_1(x) > 0$ $(\alpha < x < \beta)$

としてよい。このとき $u_1'(\alpha) > 0$, $u_1'(\beta) < 0$

が成りたつ。もし $u_2(x) \neq 0$ $(\alpha < x < \beta)$

とすると $u_2(x) > 0$ $(\alpha < x < \beta)$ としてよい。

又 $u_2(\alpha) > 0$ かつ $u_2(\beta) > 0$ となる。

∵) もし $u_2(\alpha)=0$ となるなら $u_1'(\alpha)=k\,u_2'(\alpha)$ なる k を用いて $u_1(x)=k\,u_2(x)$ となってしまうから。

∴ $u_2(\alpha)>0$ が成立する。同様にして $u_2(\beta)>0$ となる □

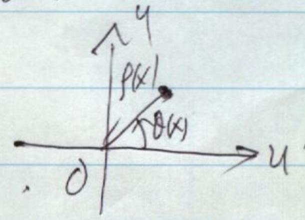
一方 ロンスキアン $u_1'(x)u_2(x)-u_1(x)u_2'(x)=C$ (一定) なので

$$\underset{\substack{\vee\\0}}{u_1'(\alpha)}\,\underset{\substack{\vee\\0}}{u_2(\alpha)}-\underset{\substack{=\\0}}{u_1(\alpha)}\,u_2'(\alpha)=\underset{\substack{\wedge\\0}}{u_1'(\beta)}\,\underset{\substack{\vee\\0}}{u_2(\beta)}-\underset{\substack{=\\0}}{u_1(\beta)}\,u_2'(\beta)$$

となり矛盾。従って $u_2(\gamma)=0$ なる $\alpha<\gamma<\beta$ が存在することとなる。 □

(2)の解 $u(x)^{(\neq 0)}$ に対し ← プ(リ)ューファ変換という

$$\begin{cases} u(x)=\rho(x)\sin\theta(x) \\ u'(x)=\rho(x)\cos\theta(x) \end{cases},\quad \rho(x)>0,$$



と極座標を用いて書いてみると、

解 $u(x)$ の振動の速さは $\theta'(x)$ で測ることができる。

$$u(x)=0 \iff \theta(x)=n\pi \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

に注意。

$\therefore$ $\underbrace{u'(x)}_{\rho\cos\theta} = \rho'(x)\sin\theta + \rho\cos\theta \cdot \theta'$ ⋯①

また $\underbrace{u''}_{-qu = -q\rho\sin\theta} = \rho'\cos\theta - \rho\sin\theta\cdot\theta'$ ⋯②

①$\times\cos\theta$ − ②$\times\sin\theta$ より

$\rho\cos^2\theta + q\rho\sin^2\theta = \rho\cdot\theta'$ ⋯③

$\therefore$ $\boxed{\theta' = \cos^2\theta + q(x)\sin^2\theta}$ ⋯③

をうる。

スツルムの比較定理 という

定理 46 $q_1(x), q_2(x) \in C[a,b]$ で

$q_1(x) \leqq q_2(x) \quad (\forall x \in [a,b])$

をみたすとする。 $u_1'' + q_1 u_1 = 0$,

$u_2'' + q_2 u_2 = 0$ の解 u_1, u_2 に対応する

θ_1, θ_2 に対して, もし

$\theta_1(a) \leqq \theta_2(a)$ ならば $\theta_1(x) \leqq \theta_2(x)$ $(\forall x \in [a,b])$

が成りたつ. また $q_1(x) < q_2(x)$ $(x \in (a,b))$ ならば

$\theta_1(x) < \theta_2(x)$ $(\forall x \in (a,b])$ が成立する。

∵ ③より

$$\begin{cases} \theta_1' = \cos^2\theta_1 + q_1(x)\sin^2\theta_1 \\ \theta_2' = \cos^2\theta_2 + q_2(x)\sin^2\theta_2 \end{cases}$$

とみなす. ここで $\varphi(x) = \theta_2(x) - \theta_1(x)$ とおくと

$$\varphi' = \underbrace{\cos^2\theta_2 - \cos^2\theta_1}_{-(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1)} + \underbrace{q_2\sin^2\theta_2 - q_1\sin^2\theta_1}_{(q_2 - q_1)\sin^2\theta_1 + q_2(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1)}$$

$$= (q_2 - 1)(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1) + \underbrace{(q_2 - q_1)\sin^2\theta_1}_{g(x)}$$

$$= \underbrace{(q_2 - 1)\left(\frac{\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}\right)}_{h(x)} \times \varphi(x) + g(x)$$

$h(x) \in C[a,b]$. $\quad g(x) \geq 0$ ← 仮定より

$$\therefore \varphi' - h\varphi = g(x) \geqq 0.$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(e^{-\int_a^x h(t)dt}\varphi(x)\right) \geqq 0$$

$$\therefore e^{-\int_a^x h(t)dt}\varphi(x) \geq \varphi(a) \quad (\forall x > a)$$

となる。仮定より $\varphi(a) \geqq 0$ なので $\varphi(x) \geqq 0$ となる

さらに もし $g_1(x) < g_2(x)$ $(x \in (a,b))$ なら $\sin\theta_1 \neq 0$ なら

上の計算で $\frac{d}{dx}\left(e^{-\int_a^x h(t)dt}\varphi(x)\right) > 0$ $(x \in (a,b))$.

(注) ここで $\sin\theta_1(x_0) = 0$ なる x_0 があっても このとき

$u_1(x_0) = 0$ で $u_1(x) \not\equiv 0$ なので $u_1'(x_0) \neq 0$.

∴ x_0 の近傍では $u_1(x) \neq 0$ ∴ $\sin\theta_1(x) \neq 0$.

$g(x) > 0$ (x_0 の近傍で) となる.

このことから 結局 $e^{-\int_a^x h(t)dt}\varphi(x)$ は狭義単調

増加となるので $\varphi(x) > 0$ $(x > a)$ となる $\boxed{\text{证}}$

"$g(x)$が大きいほど 解はより速く振動する"

ことになる。

例 $g(x)$ を $x > 0$ で定義された連続関数

$\exists M > 0$ s.t. $g(x) > M$ $(x > 0)$ とする.

このとき $u'' + g(x)u = 0$ $(x > 0)$

の 非自明解は 無限に多くの正の零点をもつ.

(∵) $v'' + Mv = 0$ の 解は

$$v(x) = C_1 \sin(\sqrt{M}x) + C_2 \cos(\sqrt{M}x)$$

$$= \hat{C}_1 \sin(\sqrt{M}x + \alpha) \quad とかける.$$

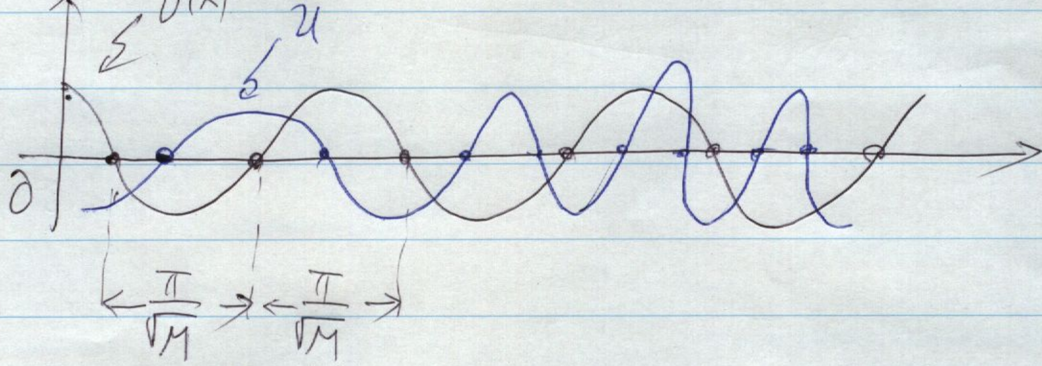
$$\left(\hat{C}_1 \cos\alpha = C_1, \quad \hat{C}_1 \sin\alpha = C_2 \right)$$

$v(x)$は周期$\dfrac{2\pi}{\sqrt{M}}$で振動し、uの方が速く振動するので $\exists x_n > 0$ s.t.

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots, \quad u(x_n) = 0.$$

$$\left(x_{j+1} - x_j < \frac{\pi}{\sqrt{M}} \right)$$

が成立する.



⑪ 固有値問題.

パラメータλを含む方程式

(3) $\varphi'' + (q(x) + \lambda)\varphi = 0, \quad a < x < b.$

を考える

また $\varphi(x) \neq 0$ であって 境界条件

(4) $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

をみたすものがあるとき、λ を固有値、

$\varphi(x)$ を固有関数という。

固有値 λ とその固有関数 $\varphi(x)$ をすべて求める

ことを (スツルム・リュビルの) 固有値問題という

定理47 固有値は可算無限個存在し、

すべて実数となる。その すべての固有値を

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \lambda_{n+1} \cdots$$

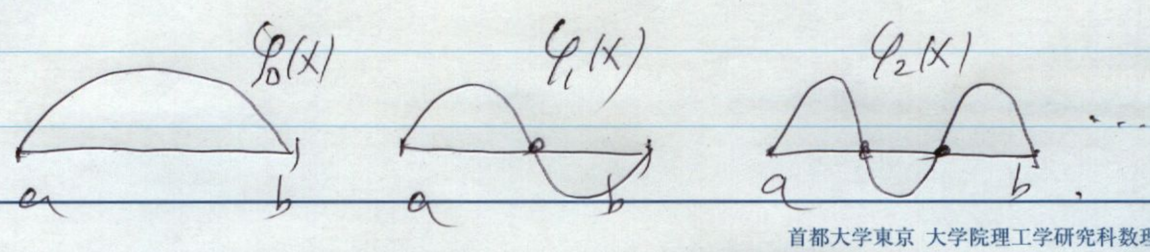
とならべることができ $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$ をみたす.

各固有値 λ_n には (定数倍を除いて) 唯1つの

固有関数 $\varphi_n(x)$ があり、$\varphi_n(x)$ は

区間 (a,b) 内にちょうど n 個 $(n=0,1,\ldots)$

の零点をもつ.



注) プリュファー変換 $\varphi(x) = \rho(x)\sin\theta(x)$,

$\varphi'(x) = \rho(x)\cos\theta(x)$ を用いると、境界条件 (4) は

$\theta(a) = 0, \quad \theta(b) = 0$ と表せる。

定理の証明は略す。

(柳田・栄「常微分方程式論」P194〜 参照)

<u>命題48</u> $\displaystyle\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = 0 \quad (i \neq j)$

∵

$$\varphi_i'' + (q(x) + \lambda_i)\varphi_i = 0 \quad \cdots ①$$

$$\varphi_j'' + (q(x) + \lambda_j)\varphi_j = 0 \quad \cdots ②$$

①×φ_j − ②×φ_i より

$$\underbrace{\varphi_i''\varphi_j - \varphi_i\varphi_j''}_{\parallel \atop (\varphi_i'\varphi_j - \varphi_i\varphi_j')'} + (\lambda_i - \lambda_j)\varphi_i\varphi_j = 0.$$

∴ 積分して

$$\underbrace{\left[\varphi_i'\varphi_j - \varphi_i\varphi_j'\right]_a^b}_{\parallel \atop 0} + \underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)}_{\neq \atop 0}\int_a^b \varphi_i\varphi_j\,dx = 0.$$

∴ $\displaystyle\int_a^b \varphi_i\varphi_j\,dx = 0$ となる $\square$

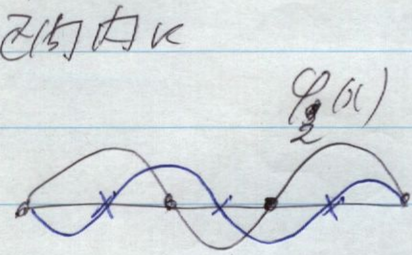
命題49 $\varphi_n(x)$ と $\varphi_{n+1}(x)$ とは それぞれの零点を分離しあう。

(証)
$$\varphi_n'' + (q+\lambda_n)\varphi_n = 0$$
$$\varphi_{n+1}'' + (q+\lambda_{n+1})\varphi_{n+1} = 0.$$

$\lambda_n < \lambda_{n+1}$ より $q+\lambda_n < q+\lambda_{n+1}$.

∴ スツルムの比較定理より φ_n より φ_{n+1} の方が早く振動する。特に $\varphi_n(x)$ のとなりあう零点の間に少なくとも1個、φ_{n+1} の零点がある。

また もし φ_{n+1} の零点が その区間内に 2個あるとすると φ_{n+1} は $n+2$ 個以上の零点を (a, b) 内にもつことになり 定理に反する。 □



(注) 以上、境界条件を $u(a)=u(b)=0$ の場合で紹介したが 別の境界条件

(例えば $u(a)=u'(b)=0$. とか

$u'(a)=0,\ u'(b)=0$)

とか

に対しても同様の主張が成り立つ.

(固有値, 固有関数は 境界条件が異なれば異なる.)

例
$$\begin{cases} u''+\lambda u=0, & a<x<b \\ u(a)=u(b)=0 \end{cases}$$

の固有値, 固有関数を求める.

Claim: λが固有値とした ら $\lambda>0$ が成立.

☺ 固有関数を $u\neq0$とする

$$\therefore \underbrace{\int_a^b u''u\,dx}_{\text{II 部分積分}} + \lambda \underbrace{\int_a^b u^2dx}_{\vee\ 0} = 0.$$

$$\underbrace{[u'u]_a^b}_{\text{II }0\ \uparrow\text{境界条件より}} - \int_a^b (u')^2dx \quad \therefore \lambda = \frac{\int_a^b (u')^2dx}{\int_a^b u^2dx} \geq 0.$$

となるが、もし $\lambda=0$ とすると、 $\int_a^b (u')^2 dx = 0$.

$\therefore u'(x)=0$ $\therefore u(x)=c$ (定数) となり $u(a)=u(b)=0$

より $u(x)\equiv 0$ となるが矛盾. $\therefore \lambda>0$. □

$\therefore$ $u''+\lambda u=0$ の一般解は

$$u(x) = A\cos\sqrt{\lambda}(x-a) + B\sin\sqrt{\lambda}(x-a)$$ が一般解.

また

$u(a)=0$ より $0 = A$.

$u(b)=0$ より $B\sin\sqrt{\lambda}(b-a) = 0$.

$B\neq 0$ として $\sin\sqrt{\lambda}(b-a)=0$

$$\therefore \sqrt{\lambda}(b-a) = (n+1)\pi \quad (n=0,1,2,\dots)$$

$$\therefore \lambda=\lambda_n=\left(\frac{(n+1)\pi}{b-a}\right)^2 \quad (n=0,1,2,\dots)$$

$$\varphi_n(x) = B\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{b-a}(x-a)\right).$$

が固有関数となる。

問1 $p(x)>0$ ($x\in[a,b]$) で $p\in C^1[a,b]$.
$q\in C[a,b]$ とする.

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u(x)=0,\quad x\in[a,b]$$

の2つの1次独立な解 $u_1(x), u_2(x)$ に対して

$$\frac{d}{dx}\left\{p(x)\left(u_1'(x)u_2(x)-u_1(x)u_2'(x)\right)\right\}=0$$

を示せ.

問2. ~~q~~ $g, h\in C[a,b]$ に対し

$$u''(x)+g(x)u'(x)+h(x)u(x)=0$$

は $p(x)=e^{\int_c^x g(t)dt}$, $q(x)=h(x)p(x)$

として $(p(x)u'(x))'+q(x)u(x)=0$

と変形できることを示せ.

(但し, 上の c は $a<c<b$ なる任意の c を1つ決めて固定するものとする)

問3

$$u''(x)+\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)u(x)=0,\quad x>0$$

の解 $u(x)\neq 0$ は，$x>0$ に無限個の正の零点

(すなわち $u(x_n)=0$ なる $x_n>0$ の列 $\{x_n\}$)

が存在することを示せ。

問4 固有値問題

$$\begin{cases} u''+\lambda u=0, & a<x<b \\ u(a)=0, \ u'(b)=0 \end{cases}$$

の固有値，固有関数をすべて求めよ

問5 固有値問題

$$\begin{cases} u''+\lambda u=0, & a<x<b \\ u'(a)=u'(b)=0 \end{cases}$$

の固有値，固有関数をすべて求めよ。