§8. いくつかの数理モデル

いくつかの具体的な現象を記述する数理モデルとその解析を紹介しよう.

さまざまな現象を数理モデルを立てて.その解析を通して,現象の数学的理解を深めることを1つの目標とする。

- 力学(非線形振動)
- 化学反応
- 感染症の伝播
- 生物の個体~~数~~増殖.

などいろいろあるが,ここでは.数理生態学における生物の個体増殖モデル

(主に,ロトカ・ボルテラモデルとよばれるもの)

を紹介しよう.

(1) 一般的準備.

解軌道の挙動を一般に理解するのに役立つ.

ヌルクラインの概念を学んでおく。

2つの未知関数 $u(t)$, $v(t)$ に対する

連立微分方程式:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = f(u(t), v(t)) \\ \dfrac{dv}{dt}(t) = g(u(t), v(t)) \end{cases}$$

の解軌道 $(u(t), v(t))$ は. 相平面上の
(uv平面)

動きで表現できる.

uv平面において. $f(u, v) = 0$ は一般に

曲線を表し. これを第1のヌルクラインという

同様に $g(u, v) = 0$ で表される曲線を

第2のヌルクラインという

3

例として

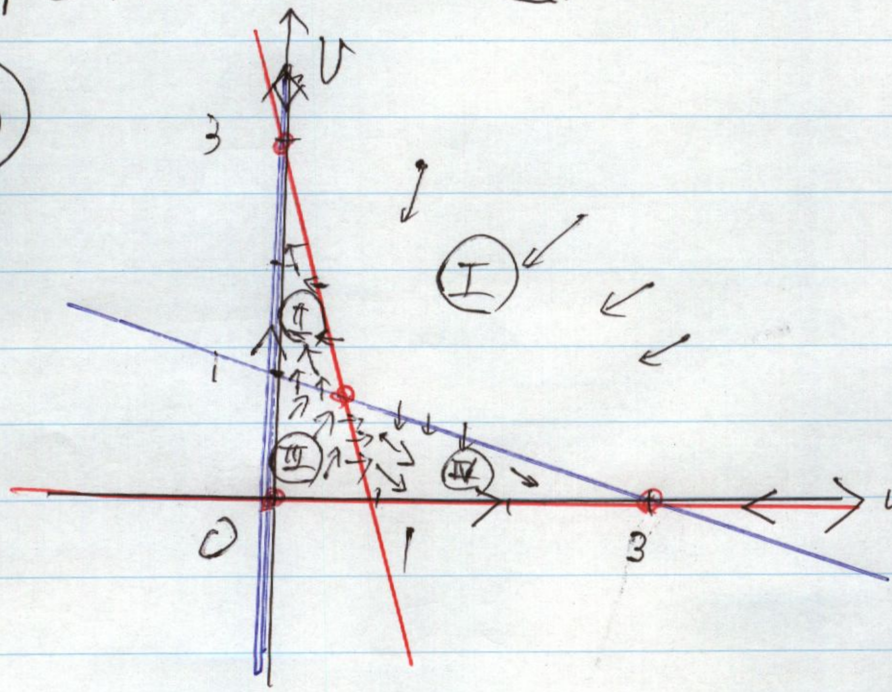
$u(0)=u_0\geqq 0,\ v(0)=v_0\geqq 0$ なら $u(t)\geqq 0,\ v(t)\geqq 0\ (t\geqq 0)$ となる

(1) $$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u(3-u-9v) & (=f(u,v)) \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = v(3-3u-v) & (=g(u,v)) \end{cases}$$

を考える。第1のヌルクラインを青で表し

第2のヌルクラインを赤で表すと、以下の通り

$u\geqq 0,\ v\geqq 0$ の領域のみ着目する。



f, g の正負に従って解軌道の向きがわかる！

Ⅰ … $f<0,\ g<0$.

Ⅱ … $f<0,\ g>0$

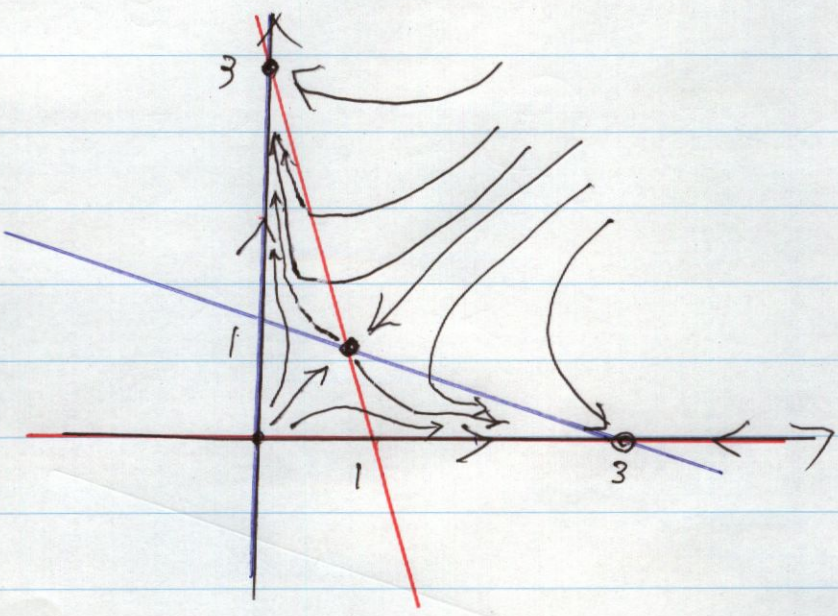
Ⅲ … $f>0,\ g>0$

Ⅳ … $f>0,\ g<0$.

ちなみに、第1のヌルクラインと第2のヌルクラインの交点は 平衡点 となる。

上の例では、4つの平衡点 $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,3)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ をもつ。

各ヌルクライン上での解軌道の向き，
各領域 Ⅰ〜Ⅳ での解軌道の向きから
おおよそ，(1)の解軌道の様子が以下の
ようになることがわかる。(推察される。)



一般に、こうしたヌルクラインを用いた解軌道の
向きを大ざっぱにつかんだ後に、各平衡点
のまわりでの線形化解析，及び、リャプノフ関数
(できるなら)
などを構成，などを
通して，(あるいはポアンカレ・ベンディクソンの定理を
利用したりして周期軌道の存在をしらべたりすること)
解軌道の詳しい挙動をしらべることになる。

⑪ ロトカ・ボルテラモデル

食う・食われるの関係にある2種類の生物の時刻 t での個体数(密度)をそれぞれ $u(t), v(t)$ として、次の数理モデルを考える。

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = u(t)\cdot(a - \underbrace{b\,v(t)}_{}) & \leftarrow \text{食われる効果} \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = v(t)\,(-c + \underbrace{d\,u(t)}_{}) & \leftarrow \text{食う効果} \end{cases}$$

$a, b, c, d > 0$ は定数とする。

$u(t)$ … 食われる生物の個体数
(例えば小魚)

$v(t)$ … 食う生物の個体数
(例えばサメ)

初期条件 $u(0) = u_0 \geqq 0$, $v(0) = v_0 \geqq 0$.

として $t \to +\infty$ での挙動をしらべたい。

もし $u_0 = 0$; $v_0 > 0$ なら $u(t) \equiv 0$ で $\dfrac{dv}{dt} = -c\,v(t)$

によって $v(t) = v_0 e^{-ct} \to 0 \ (t \to +\infty)$.

もし $u_0>0,\ v_0=0$ なら $v(t)\equiv 0$ となり、

$$\frac{du}{dt} = a u \quad \text{より} \quad u(t)=u_0 e^{at} \to +\infty \quad (t\to+\infty).$$

では $u_0>0,\ v_0>0$ のときどうなるか？

$(u_*, v_*) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ は平衡点.

ここでの線形化行列は

$$A=\begin{pmatrix}0 & -\frac{bc}{d}\\ \frac{ac}{b} & 0\end{pmatrix}$$

となり、固有値は $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{ac^2}{d}}$.

（⇝ 周期軌道が示唆される.）

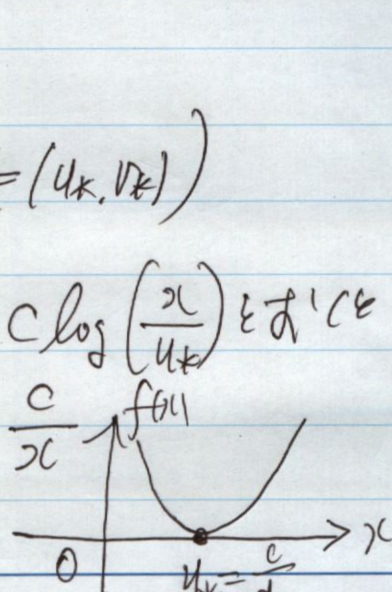
実は、
$$V(u,v) = d(u-u_*) - c\log\left(\frac{u}{u_*}\right) + b(v-v_*) - a\log\left(\frac{v}{v_*}\right)$$

を考えると
$$V(u_*,v_*)=0,$$
$$V(u,v)>0 \quad ((u,v)\neq(u_*,v_*))$$

がわかる. ∵ $f(x)=d(x-u_*)-c\log\left(\frac{x}{u_*}\right)$ とおくと

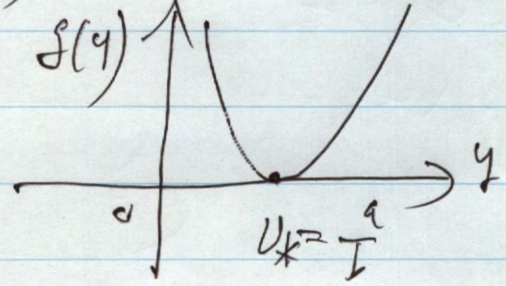
$$f(u_*)=0,\quad f'(x)=d-\frac{c}{x}$$

より、$f(x)$ のグラフは右の通り.



$g(y) = b(y - v_*) - a\log\left(\frac{y}{v_*}\right)$ のグラフも

同様.



さらに

$$\frac{d}{dt}\left(V(u(t), v(t))\right)$$

$$= \left(d - \frac{c}{u}\right)u' + \left(b - \frac{a}{v}\right)v'$$

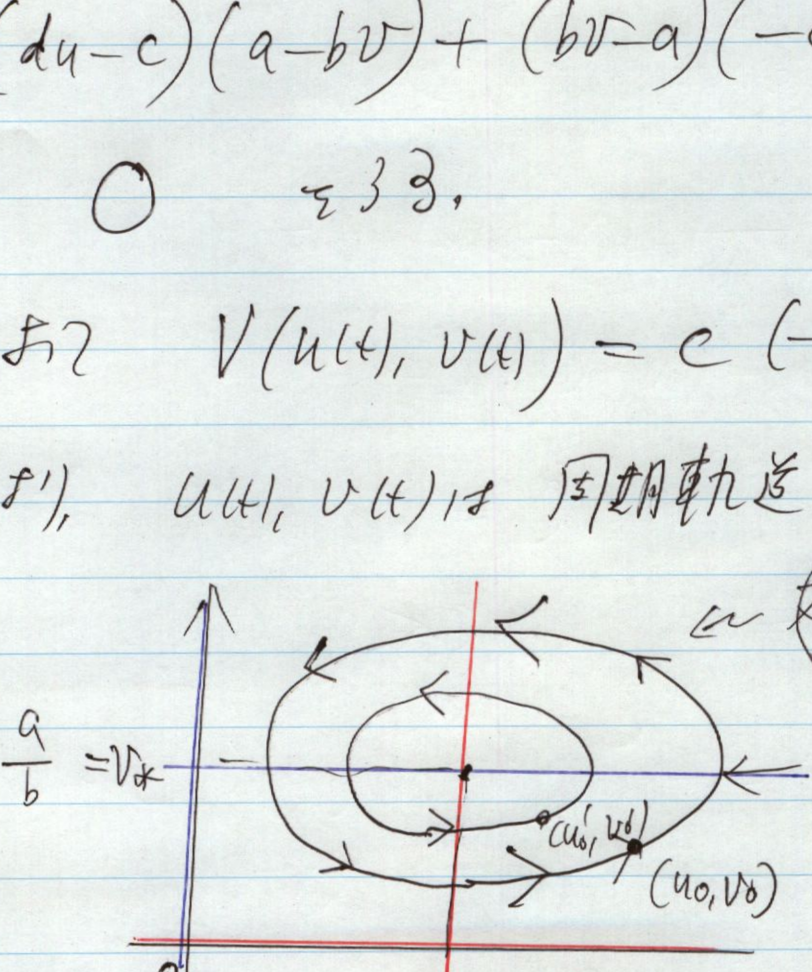
$$= \left(d - \frac{c}{u}\right)(au - buv) + \left(b - \frac{a}{v}\right)(-cv + duv)$$

$$= (du - c)(a - bv) + (bv - a)(-c + du)$$

$$= 0$$ となる.

よって $V(u(t), v(t)) = c$ (一定).

これより, $u(t), v(t)$ は 周期軌道となる



ヌルクラインから解軌道の向きもわかる

$V(u, v) = C$

$(= V(u_0, v_0))$

初期値 (u_0, v_0) が異なれば、異なる周期軌道となり、無数の周期軌道で相平面がうめつくされることになる。

今、この周期軌道の周期を $T>0$ とする。

(i.e. $u(t+T)=u(t)$, $v(t+T)=v(t)$. $(\forall t)$)

$$\frac{d}{dt}\left(\log u(t)\right)=\frac{u'(t)}{u(t)}=a-bv(t)$$

を 0 から T まで積分して

$$\underbrace{\log u(T)-\log u(0)}_{0}=aT-b\int_0^T v(t)dt \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt=\frac{a}{b}=v_* \quad \text{となる} \quad \cdots ①$$

(解の時間平均)

同様に $\dfrac{d}{dt}(\log v)=\dfrac{v'(t)}{v(t)}=-c+du(t)$ より

$$0=\log v(T)-\log v(0)=-cT+d\int_0^T u(t)dt.$$

$$\therefore \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt=\frac{c}{d}=u_* \quad \cdots ② \text{となる。}$$

昔，戦争があった期間，漁業を休止していた後，

再開したとき，小魚が以前より減り，サメが増えているデータがあり，なぜか？ということが話題となった。（漁業を休止したのだから小魚は増えるのでは？という疑問である。）

この疑問に，ボルテラが上記の数理モデルを立て，説明をつけたと言われている。

どういう説明かというと，漁業活動を行うモデルでは，（先ほどが漁業活動を行っていないモデルとして）

漁業活動することで捕かくの効果を考慮したモデル．

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{u}}{dt} = \hat{u}\left(a - \underset{\substack{\vee \\ 0}}{k} - b\hat{v}(t)\right) \\[2ex] \dfrac{d\hat{v}}{dt} = \hat{v}\left(-c - \underset{\substack{\vee \\ 0}}{k'} + d\hat{u}(t)\right) \end{cases}$$

となると考えられる。このとき，$a' = a - k$，

$c' = c + k'$ として，前のモデルと同じなので

前の考察から

$$\begin{cases} \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{u}(t)\,dt = \frac{c'}{d} = \frac{c+h'}{d} \left(> \frac{c}{d} \right) \\ \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{v}(t)\,dt = \frac{a'}{b} = \frac{a-h}{b} \left(< \frac{a}{b} \right) \end{cases}$$

となることがわかる。

このことは、小魚の個体数は、漁業を行えば、その時間平均が大きくなることを示している！

★ 数理モデルを立てて、現象を説明するという方法論がうまく働いた例として、よく知られている。

⑭ 改良版 ロトカ・ボルテラモデル

前のモデルでは、$v(t) \equiv 0$ なら

$$\frac{du}{dt} = au \quad \text{となり} \quad u(t) = u_0 e^{at} \to +\infty \quad (t \to \infty)$$

となれが、少し不自然さがある。

~~指数関数的に個体数が増加するのは~~

そこで改良版として次がある。 抑制効果（あるいは飽和効果という）

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)\left(a - e u(t) - b v(t)\right) \\ v'(t) = v(t)\left(-c + d u(t)\right) \end{cases}$$

（$e>0$ は定数。）

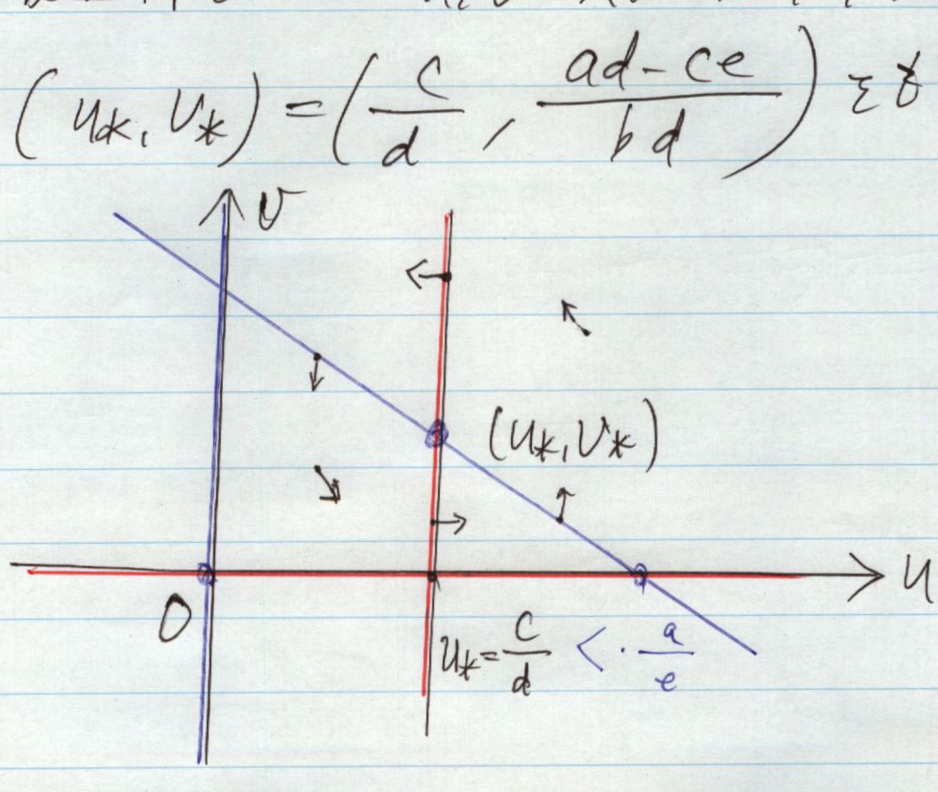
このモデルでは $v=0$ のとき $u' = u(a - eu)$

より $u(t) \to \dfrac{a}{e}$ $(t \to +\infty)$ となる。

このとき $a - \dfrac{ce}{d} = \dfrac{ad-ce}{d} > 0$ という

仮定の下で u, v 共に正の平衡点

$(u_*, v_*) = \left(\dfrac{c}{d}, \dfrac{ad-ce}{bd}\right)$ をもつ。



まず (u_*, v_*) で線形化行列を求めると、

$$A = \left.\begin{pmatrix} a-2eu-bv & -bu \\ dv & -c \end{pmatrix}\right|_{(u,v)=(u_*,v_*)}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{ec}{d} & -\frac{cb}{d} \\ \frac{ad-ce}{b} & -c \end{pmatrix}$$ となる。

$$\therefore \operatorname{tr} A = -\frac{ec}{d} - c < 0$$

$$\det A = \frac{ec^2}{d} + \frac{cb}{d}\left(\frac{ad-ce}{b}\right)$$

$$= \frac{ec^2}{d} + \frac{c}{d}(ad-ce) = ac > 0.$$

よって A の固有値は2つとも実部が負となる

ることになるので (u_*, v_*) は漸近安定

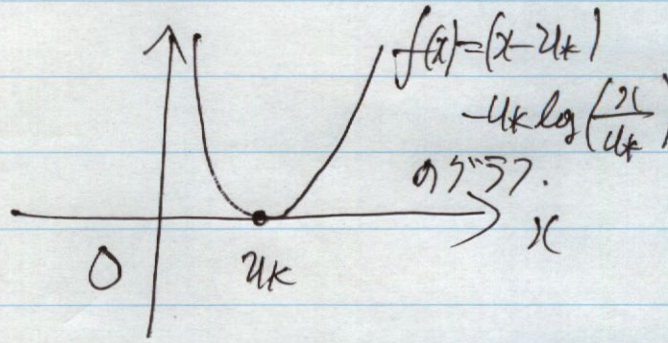
と分かる。さらに

$$V(u,v) = d(u - u_* \log u) + b(v - v_* \log v)$$
$$- d(u_* - u_* \log u_*) - b(v_* - v_* \log v_*)$$

とおくと $V(u_*, v_*)=0$.

$V(u,v)>0 \quad ((u,v)\neq(u_*,v_*))$ となり.

$$\left(V(u,v)=d\left\{(u-u_*)-u_*\log\left(\frac{u}{u_*}\right)\right\}+b\left\{(v-v_*)-v_*\log\left(\frac{v}{v_*}\right)\right\}\right)$$



$$\overset{\circ}{V}=\frac{d}{dt}\Big(V(u(t),v(t))\Big)$$

$$=d\left(1-\frac{u_*}{u}\right)u' + b\left(1-\frac{v_*}{v}\right)v'$$

$$=d\left(1-\frac{u_*}{u}\right)u(a-eu-bv) + b\left(1-\frac{v_*}{v}\right)v(-c+du)$$

$$= d(u-u_*)(\underbrace{a-eu-bv}_{}) + b(v-v_*)(\underbrace{-c+du}_{})$$

$a-eu-bv = a-e(u-u_*)-b(v-v_*)-eu_*-bv_*$, $\quad a-eu_*-bv_*=0$.

$-c+du = -c+d(u-u_*)-du_*$, $\quad -c-du_* = 0$

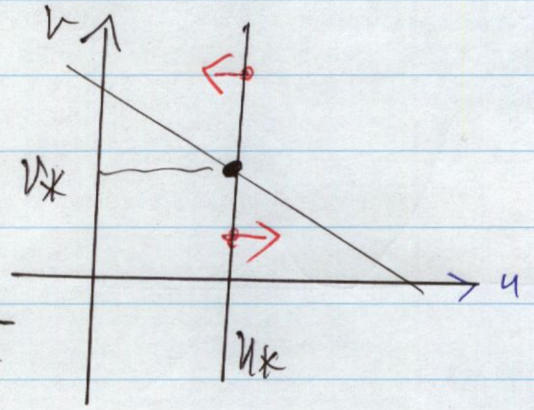
$$=-de(u-u_*)^2-bd(u-u_*)(v-v_*) = -de(u-u_*)^2 + bd(v-v_*)(u-u_*) \leqq 0 \text{ となる.}$$

また $\Sigma = \{(u,v) \mid \dot{V}(u,v) = 0\} = \{u = u_*\}$

となるが、$u = u_*$ での解軌道を考えてみることで

$\{(u_*, v_*)\}$ が Σ 内の最大の不変集合となる

ことがわかる。

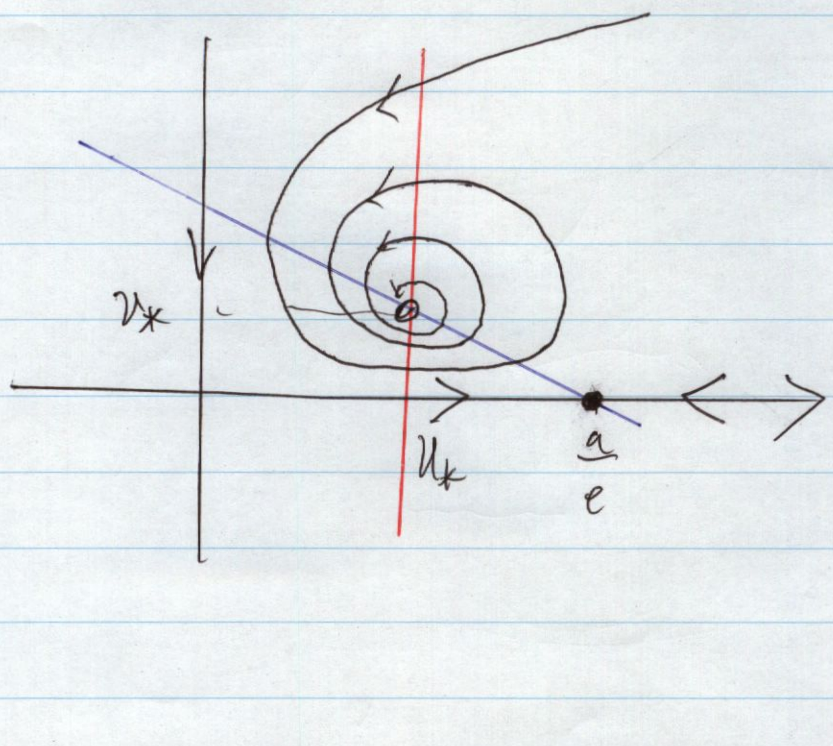


よって、ラサールの原理より

(u_*, v_*) は大域的漸近

安定となることがわかる。

ちなみに解軌道は以下のようになる。



⑪ 競争系モデル

$$\begin{cases} u' = u(a - bu - \underbrace{cv}) \\ v' = v(d - \underbrace{eu} - fv) \end{cases}$$

競争系という

競争項

$a, b, c, d, e, f > 0$.

$(0,0)$, $\left(\frac{a}{b}, 0\right)$, $\left(0, \frac{d}{f}\right)$ は平衡点.

また $bf - ce \neq 0$ として.

$a - bu - cv = 0$,　$d - eu - fv = 0$

をといて

$$(u, v) = (u^*, v^*) = \left(\frac{af - cd}{bf - ce}, \frac{bd - ae}{bf - ce}\right).$$

$u^* > 0$, $v^* > 0$ の場合を考える.

㋐ $bf - ce > 0$ の場合.
　(i.e. $bf > ce$ … 弱い競争)

(u^*, v^*) は漸近安定 となることが

線形化解析からわかる。

大域的挙動をしらべるのに $w>0$ を定数として

$$V(u,v) = (u^*\log u - u) + w(v^*\log v - v)$$

とおくと．

$$\frac{d}{dt}\left(V(u(t),v(t))\right) = \left(\frac{u^*}{u}-1\right)\times u(a-bu-cv)$$
$$+w\left(\frac{v^*}{v}-1\right)\times v(d-eu-fv)$$

$$= (u^*-u)\left(a-b(u-u^*)-c(v-v^*)\underbrace{-bu^*-cv^*}_{0}\right)$$
$$+w(v^*-v)\left(d-e(u-u^*)-f(v-v^*)\underbrace{-eu^*-fv^*}_{0}\right)$$

$$= b(u^*-u)^2 + (c+we)(u^*-u)(v^*-v) \quad \cdots (＊)$$
$$+wf(v^*-v)^2$$ となる．

ここで ~~[illegible]~~ となるように w をえらぶ．

$$w = \frac{2bf-ce}{e^2} > 0 \quad \left(\text{i.e. } we+c = \frac{2bf}{e}\right)$$

すると

$$(＊)\text{の右辺} = b(u^*-u)^2 + \frac{2bf}{e}(u^*-u)(v^*-v)$$
$$+\frac{(2bf-ce)}{e^2}f(v^*-v)^2.$$

となる．

$$= b\left\{(u^*-u)^2 + \frac{2f}{e}(u^*-u)(v^*-v) + \frac{f^2}{e^2}(v^*-v)^2\right\}$$

$$+ \frac{(bf-ce)}{c^2} f (v^*-v)^2$$

$$= b\left\{(u^*-u) + \frac{f}{e}(v^*-v)\right\}^2 + \frac{(bf-ce)}{c^2} f (v^*-v)^2$$

$\geqq 0$. かつ 等号は $v=v^*$ かつ $u=u^*$

のときのみである.

$$\therefore \tilde{V}(u,v) = \{V(u,v) - (u^*\log u^* - u^*)$$

$$- w(v^*\log v^* - v^*)\}$$

と定めると.

$$\tilde{V}(u,v) \geqq 0, \quad \tilde{V}(u^*,v^*) = 0.$$

$$\dot{\tilde{V}} = \frac{d}{dt}\left(\tilde{V}(u(t),v(t))\right) \leqq 0$$

かつ $\dot{\tilde{V}} < 0 \quad (u,v) \neq (u^*,v^*)$

となるので $\tilde{V}(u,v)$ は リャプノフ関数となる.

以上より (u^*, v^*) は 大域的漸近安定となる。

① $bf - ce < 0$ の場合.

(i.e. $bf < ce$ … ~~弱~~強い競争)

このとき (u_*, v_*) は鞍点となることがわかり,

また $\left(\frac{a}{b}, 0\right)$, $\left(0, \frac{d}{f}\right)$ は漸近安定となる

こともわかるので, 解軌道は, およそ, 以下の

とおりとなる (各自, 確かめよ.)