解析学B.

2012.10.3.

§0. Introduction

例.1

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = u(t) - u(t)^2 - \varepsilon(1+\sin t) \\[2ex] u(0) = 0.5 \end{cases}$$

$\varepsilon = 0$ のとき、変数分離形なので求積法でとける。

このとき $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t) = 1$ となる。

$\varepsilon > 0$ のとき、解は存在する？ 時間大域的に

（つまり $0 \leqq t < +\infty$ で）存在するか？

存在するとして $t \to +\infty$ で $u(t)$ の挙動は？

例.2

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = u(t)\,(1 - v(t)) \\[2ex] \dfrac{dv(t)}{dt} = v(t)\,(-1 + u(t)) \end{cases}$$

$u(0) = 0.5$, $v(0) = 0.5$

は時間大域的に解をもつか？ $t \to +\infty$ での $u(t), v(t)$ の挙動は？

例.3　$0<\alpha<1$ とする。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2}(t) = u(t)\bigl(u(t)-\alpha\bigr)\bigl(u(t)-1\bigr) \\ u(0)=0, \quad u'(0)=\beta>0 \end{cases}$$

は $v(t)=\dfrac{du}{dt}(t)$ とおくことで、連立微分方程式におきかえることができる.

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = v(t) \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = u(t)\bigl(u(t)-\alpha\bigr)\bigl(u(t)-1\bigr). \\ u(0)=0, \quad v(0)=\beta. \end{cases}$$

◎ 一般に n 階の微分方程式（1つの未知関数）に対しても、n 個の未知関数に対する1階の連立微分方程式におきかえることができる。

◎ そこで 領域 $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ に対し $f_i(t,x)$ は $(t,x)\in D$ で連続な関数とする. $(1\leqq i\leqq n)$

$(t_0, x_0) \in D$ に対して、n 個の未知関数 $u_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ に関する

初期値問題：t_0 を含むある区間 I があって、

$$
\circledast \begin{cases} \dfrac{du_i(t)}{dt} = f_i(t, u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)), & t \in I \\ u_i(t) = x_{0,i} & (1 \leq i \leq n) \end{cases}
$$

$\left(但し\ x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ \vdots \\ x_{0,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right)$

をみたす $u_i(t) \in C^1(I)$ のことを

$\circledast$ の解という。

命題1　$u_i(t) \in C^1(I)$ が $\circledast$ の解

$1 \leq i \leq n$ に対して

$$\Longleftrightarrow \quad u_i(t) = x_{0,i} + \int_{t_0}^{t} f_i(s, u_1(s), \ldots, u_n(s))\, ds \quad (\forall t \in I)$$

$1 \leq i \leq n$ に対し、$u_i(t) \in C(I)$ が

をみたす。

以後、$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$,

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ \vdots \\ f_n(t,x) \end{pmatrix}$$ とかく。

このとき

$$(*) \iff \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)), & t \in I \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

$$\iff u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds. \quad (t \in I).$$

ここで $$\int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} f_1(s, u(s))\,ds \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t} f_n(s, u(s))\,ds \end{pmatrix}.$$

注 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対し、$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$.

・ $a < b$ に対し

$$\left\| \int_a^b f(s, u(s))\,ds \right\| \leq \int_a^b \| f(s, u(s)) \|\,ds$$

が成り立つ。

$\because$ 連続な $u(s)$ に対し $f(s, u(s))$ も連続となり、各 $\int_a^b f_i(s, u(s))\,ds$ は、リーマン和

$$\sum_{k=1}^{N} f_j(\xi_k, u(\xi_k))\Delta\xi_k$$ の $N \to \infty$ での極限として

かけるので

$$\int_a^b f(s, u(s))\,ds = \lim_{N \to \infty} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N} f_1(\xi_k, u(\xi_k))\Delta\xi_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N} f_n(\xi_k, u(\xi_k))\Delta\xi_k \end{pmatrix}.$$

よって

$$\left\| \int_a^b f(s, u(s))\,ds \right\| = \lim_{N \to \infty} \left\| \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N} f_1(\xi_k, u(\xi_k))\Delta\xi_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N} f_n(\xi_k, u(\xi_k))\Delta\xi_k \end{pmatrix} \right\|.$$

ここで、一般に $y^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} y^{(k)} \right\| \leqq \sum_{k=1}^{N} \| y^{(k)} \| \quad \text{なので}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \begin{pmatrix} f_1(\xi_k, u(\xi_k)) \\ \vdots \\ f_n(\xi_k, u(\xi_k)) \end{pmatrix} \Delta \xi_k \right\|$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} f_1(\xi_k, u(\xi_k)) \\ \vdots \\ f_n(\xi_k, u(\xi_k)) \end{pmatrix} \right\|}_{\| f(\xi_k, u(\xi_k)) \|} \Delta \xi_k .$$

$$\xrightarrow[N \to \infty]{} \int_a^b \| f(s, u(s)) \| \, ds .$$

よって $\left\| \int_a^b f(s, u(s))\, ds \right\| \leqq \int_a^b \| f(s, u(s)) \| \, ds$ となる.

□

§1. 初期値問題の時間局所解の一意存在

（縮小写像の原理を用いた証明）

$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ を領域とし,

$f(t,x) : D \to \mathbb{R}^n$ は連続であって,

さらに次の条件をみたすとする:

$\forall$ コンパクト集合 $K \subset D$ に対して,
(= 有界閉集合)

$\exists\, L = L(K) > 0$ s.t.

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leqq L \, \|x-y\|$$

$$(\forall (t,x), (t,y) \in K).$$

以後, この条件をみたす $f(t,x)$ を D 上で
x に関して局所リプシッツ関数であるという.

定理 2 $f(t,x)$ が上記の条件をみたすとし,
$(t_0, x_0) \in D$ とする。このとき, t_0 を含むある
区間 I が存在して, ※ は唯1つの解をもつ.

注 $f(t,x)$ が D 上 C^1 級ならば, D 上で
x に関して局所リプシッツ関数となることがわかる

ので、C^1級のfに対して、時間局所解の一意存在がわかることになる。

⑪ 縮小写像の原理

定理3 （縮小写像の原理）

(X, d)を完備距離空間とする

（i.e. $d(f_m, f_l) \to 0 \quad (m, l \to \infty)$ なら、

$\exists f \in X$ s.t. $d(f_m, f) \to 0 \ (m \to \infty)$ となること。）

写像 $T : X \to X$ が縮小写像であるとする。

（i.e. $\exists\, 0 < \lambda < 1$ s.t.

$d(T(f), T(g)) \leqq \lambda\, d(f, g), \quad (\forall f, g \in X)$

が成り立つこと。）

このとき、$T(f^*) = f^*$ となる唯1つのf^*（Tの不動点という）が存在する。$\forall f_1 \in X$に対して、

$f_{n+1} = T(f_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$ によって$\{f_n\}$を定めるとき、

$d(f_n, f^*) \to 0 \quad (n \to \infty)$ が成り立つ。

proof. $\forall f_1 \in X$ に対して $f_{n+1} = T(f_n)$ $(n=1,2,\dots)$ で $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ を定めること.

$m > n$ に対して

$$d(f_m, f_n) \leqq d(f_m, f_{m-1}) + d(f_{m-1}, f_{m-2}) + \cdots + d(f_{n+1}, f_n)$$

$$\leqq \underbrace{(\lambda^{m-2} + \lambda^{m-3} + \cdots + \lambda^{n-1})}_{\lambda^{n-1}(\underbrace{1+\lambda+\cdots+\lambda^{m-n-1}}_{\wedge\ \frac{1}{1-\lambda}})} d(T(f_1), f_1)$$

$$\leqq \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} d(T(f_1), f_1) \quad \cdots (\#)$$

をうる. よって $\{f_m\}$ は X のコーシー列となり,

X の完備性から $\exists f^* \in X$ s.t

$$d(f_m, f^*) \to 0 \quad (m \to \infty).$$

また

$$d(\underbrace{T(f_m)}_{f_{m+1}}, T(f^*)) \leqq \lambda\, d(f_m, f^*) \to 0 \quad (m \to \infty)$$

より $\underset{m\to\infty として}{\wedge}$ $d(f^*, T(f^*)) \leqq 0$, $\therefore f^* = T(f^*)$ をうる.

・(不動点の一意性)

$f^*, g^* \in X$ が共に T の不動点とすると

$d(\underbrace{T(f^*)}_{= f^*}, \underbrace{T(g^*)}_{= g^*}) \leqq \lambda d(f^*, g^*)$ となり

$0 < \lambda < 1$ より $d(f^*, g^*) = 0$. $\therefore f^* = g^*$ をうる.

また (#) で $m \to \infty$ として

$$d(f^*, f_n) \leqq \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} d(T(f_1), f_1)$$

をうる。

このことは, $d(f_n, f^*) \to 0 \ (n \to \infty)$ だけでなく,

その収束が とても速い ことを意味している. $\square$

$I = [a, b]$ (有界閉区間) として.

$X = C(I) = \{ f : I \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ は } I \text{ 上連続} \}$,

$f, g \in X$ に対して $\left(f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \right)$

$d(f, g) = \max_{a \leqq t \leqq b} \| f(t) - g(t) \|$ とおくとき.

$\| f(t) - g(t) \| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |f_j(t) - g_j(t)|^2}$ 成分で書くと

次が成り立つ。

命題4　$X = C(I)$ は，距離 $d(f,g)$ をもつ完備距離空間となる。

(証)　(念のため，証明をつけておく。)

・ $d(f,g)$ がキョリとなることは，$f, g, h \in X$ に対し

$$d(f,g) = \max_{a \leq t \leq b} \underbrace{\|f(t) - g(t)\|}_{\leq \|f(t)-h(t)\| + \|h(t)-g(t)\|}$$

$$\leq \max_{a \leq t \leq b} \|f(t) - h(t)\| + \max_{a \leq t \leq b} \|h(t) - g(t)\|$$

$$= d(f,h) + d(h,g)$$

となることよりわかる。

・ (完備性)　$d(f^{(m)}, f^{(l)}) \to 0 \ (m, l \to \infty)$

$\{f^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset X$ とする。

$\forall \varepsilon > 0$ に対し，$\exists N > 0$ s.t.

$m, l \geq N$ なら　$d(f^{(m)}, f^{(l)}) \leq \varepsilon$ が成立。

$$\| f^{(m)}(t) - f^{(l)}(t) \| \leqq d(f^{(m)}, f^{(l)}) \leqq \varepsilon \quad \cdots (*)$$

$$(\forall t \in [a,b],\ \forall m, l \geqq N)$$

なので、各 $t \in [a,b]$ を固定したとき、

$\{ f^{(m)}(t) \}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ のコーシー列となる。

$\mathbb{R}^n$ の完備性から $\exists y \in \mathbb{R}^n$ s.t.

$$\| f^{(m)}(t) - y \| \to 0 \quad (m \to \infty).$$

y ← 各 t で定まるので $g(t)$ とかく。

主張① このとき、$g \in X = C(I)$ となる。

$\because$ $(*)$ で $l \to \infty$ として、

$$\| f^{(m)}(t) - g(t) \| \leqq \varepsilon \quad \cdots (**)$$

$$(\forall t \in [a,b],\ \forall m \geqq N)$$

となる。

今、$\forall t_0 \in I$ に対し、$f^{(N)} \in C(I)$ なので、

$\exists \delta > 0$ s.t.

$|t - t_0| < \delta,\ t \in I$ なら $\| f^{(N)}(t) - f^{(N)}(t_0) \| < \varepsilon$ $\cdots (***)$

が成り立つ。

このとき、$|t-t_0|<\delta$, $t\in I$ に対し

$$\|g(t)-g(t_0)\| \le \underbrace{\|g(t)-f^{(N)}(t)\|}_{<\varepsilon\ (※※)\text{より}} + \overbrace{\|f^{(N)}(t)-f^{(N)}(t_0)\|}^{(※※※)\text{から}\ <\varepsilon}$$

$$+ \underbrace{\|f^{(N)}(t_0)-g(t_0)\|}_{<\varepsilon\ (※※)\text{より}}$$

$$\le 3\varepsilon$$

となる。このことは $g\in C(I)$ を意味する。□

このとき (※※) から

$$\underbrace{\max_{a\le t\le b}\|f^{(m)}(t)-g(t)\|}_{= d(f^{(m)},\, g)} \le \varepsilon \quad (\forall m\ge N)$$

となる

このことは $d(f^{(m)},g)\to 0\ (m\to\infty)$

なることを意味する。よって $X=C(I)$ の完備性

が示された □

(注) $\tilde{X}$ が完備距離空間 X の閉部分集合

ならば、$\tilde{X}$ も完備距離空間となることに

注意。

さて，縮小写像の原理を用いて，解の局所解の一意存在を示そう。

proof of 定理2.

$t_0 \in (a,b)$ なるある区間 (a,b) で

$$(*) \quad u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds \quad (t \in (a,b))$$

をみたす $u \in C[a,b]$ の一意存在を示せばよい。基本的な考え方としては

$T: X \to X$, $X = C[a,b]$ を

$$T(u)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds, \quad t \in (a,b)$$

と定めるとき，$u \in C[a,b]$ が $(*)$ をみたすことと，$u \in C[a,b]$ が T の不動点 (i.e. $T(u) = u$) であることが同値であることである。

そこで，適当な区間 (a,b) に対して，T の不動点の一意存在を示せばよいことになる。

まず，$a' < t_0 < b'$，$\beta > 0$ で

$$K \equiv [a', b'] \times B(x_0, \beta) \subset D$$

（ここで $B(x_0, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leqq \beta\}$）

なるものをとる。このとき，K はコンパクトなので

$$M = \max\{\|f(t,x)\| \mid (t,x) \in K\} < +\infty$$

が定まり，また仮定より $\exists L > 0$ s.t.

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqq L\|x - y\| \quad (\forall (t,x), (t,y) \in K)$$

となる。そこで $a < t_0 < b$ を

$[a,b] \subset [a', b']$，$(b-a) \leqq \frac{\beta}{M}$ かつ $(b-a) < \frac{1}{L}$

なるよう十分 $I = [a,b]$ の幅を小さくとる。

そうして

$$\hat{X} = \{u \in C(I) \mid \|u(t) - x_0\| \leqq \beta \ (a \leqq t \leqq b)\}$$

と定めると，

$\hat{X}$ は $X = C(I)$ の閉部分集合となることがわかるので $\hat{X}$ も完備距離空間となる。

主張: $T : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ は縮小写像となる

(∵) ① まず $u \in \widetilde{X}$ に対し、$Tu \in \widetilde{X}$ となることを確める必要がある。

$$T(u)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds$$ なので

$$\|T(u)(t) - x_0\| \leqq \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|f(s, u(s))\|}_{\leqq M} ds.$$

$\leftarrow$ $u \in \widetilde{X}$ と M の定義から

(注) $t_0 \leqq t$ の場合だけ示すが $t < t_0$ でも同様

$$\leqq (b-a)M \leqq \beta. \quad (\forall t \in [a, b])$$

となるので $T(u) \in \widetilde{X}$ となる。

② $u, v \in \widetilde{X}$ に対し

$$\|T(u)(t) - T(v)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \left(f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \right) ds \right\|$$

$$\leqq \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|}_{\leqq L \underbrace{\|u(s) - v(s)\|}_{\leqq d(u, v)}} ds.$$

$\leftarrow$ $u, v \in \widetilde{X}$ と L の定義から

$$\leqq L(b-a)\, d(u, v) \quad (\forall t \in [a, b])$$

$$\therefore\ d(T(u), T(v)) \leqq \underbrace{L(b-a)}_{\wedge\ 1}\, d(u, v)$$

$$(\forall u, v \in \widetilde{X})$$

をうるので

$T : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ は縮小写像となる。

$\therefore$ 縮小写像の原理より T は唯1つの不動点 $u \in \widetilde{X}$ をもつ。

これにより、$t \in I = [a, b]$ での ㊍ の解の一意存在が示された。

$\boxed{//}$