解析学 B　期末試験 (解答例)

平成２５年１月３０日（水）　　14時40分～16時10分

コース　：＿＿＿＿＿＿＿＿

学修番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

- 開始の合図があるまで，問題の内容を見てはならない．
- 学修番号と氏名を所定欄に必ず記入すること．
- 答だけではなく答に至った経過をすべて説明すること．答のみのものは正解であっても大幅に減点することがあるので注意すること．
- 携帯電話は電源を切ってカバンにしまうこと．
- 机の上には筆記用具，学生証，時計以外は置かないこと．ただし, Ａ４サイズの自筆メモ１枚の持ち込み可．
- 試験中は教員の指示に従うこと．

1 (1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) ベクトル値関数 $u(t) \in \mathbf{R}^3$ に関する初期値問題

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad u(0) = a \in \mathbf{R}^3$$

を考え, 部分空間 $E^s \subset \mathbf{R}^3$ を

$$E^s = \{a \in \mathbf{R}^3 \mid \|u(t)\| \to 0 \ (t \to +\infty)\}$$

と定義する. このとき, E^s を具体的に求めよ.

---

(1) $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\{(1-\lambda)^2-1\} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ (第1列に関する余因子展開)

$= (1-\lambda)\{(1-\lambda)^2-2\}$

$\therefore$ $\lambda = 1, \ 1\pm\sqrt{2}$ が固有値.

- $\lambda=1$ に対する固有ベクトルは $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (計算は略す)
- $\lambda = 1+\sqrt{2}$ 〃 $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda = 1-\sqrt{2}$ 〃 $p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ となる.

(2) $\dfrac{du}{dt} = Au$ の一般解は.

$$u(t) = c_1 e^t p_1 + c_2 e^{(1+\sqrt{2})t} p_2 + c_3 e^{(1-\sqrt{2})t} p_3$$

(c_1, c_2, c_3 は任意定数)

とかける。このことから $E_s = \{ c\,p_3 \mid c \in \mathbb{R} \}$ となる。

2 次の連立微分方程式を考える.

$$u'(t) = u(t)^2 + v(t),$$
$$v'(t) = u(t) - v(t) - 2.$$

(1) 平衡点をすべて求めよ. また, この微分方程式のヌルクラインを uv 平面に描き, 解軌道の向きの様子を図示せよ.

(2) (1) で求めた各平衡点における線形化行列を求め, それぞれの平衡点の安定性を調べよ.

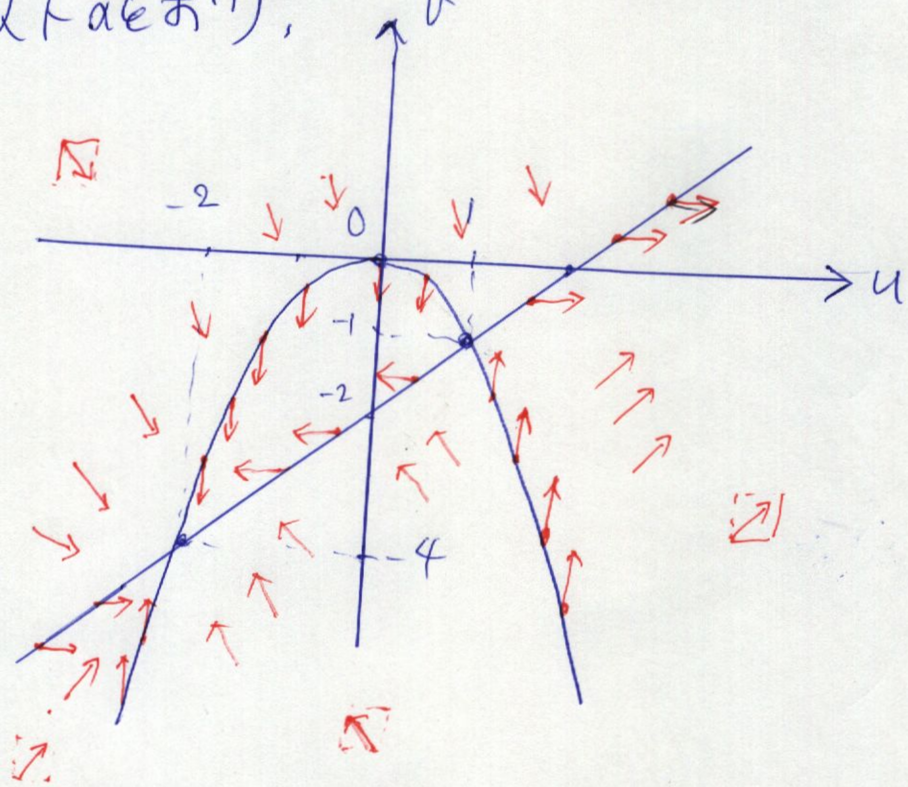
(1) $u^2+v=0$ かつ $u-v-2=0$ をとく.

$v=u-2$ を第1式に代入して $u^2+u-2=0$.

$\therefore (u+2)(u-1)=0$ $\quad \therefore u=1$ or -2.

$\therefore P(1,-1)$, $Q(-2,-4)$ の2点が平衡点となる.

この微分方程式のヌルクラインと解軌道の向きの様子は以下のとおり.



(2) $f(u,v)=u^2+v$, $g(u,v)=u-v-2$ として

$$\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ となる.

$\therefore P$ での線形化行列は $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

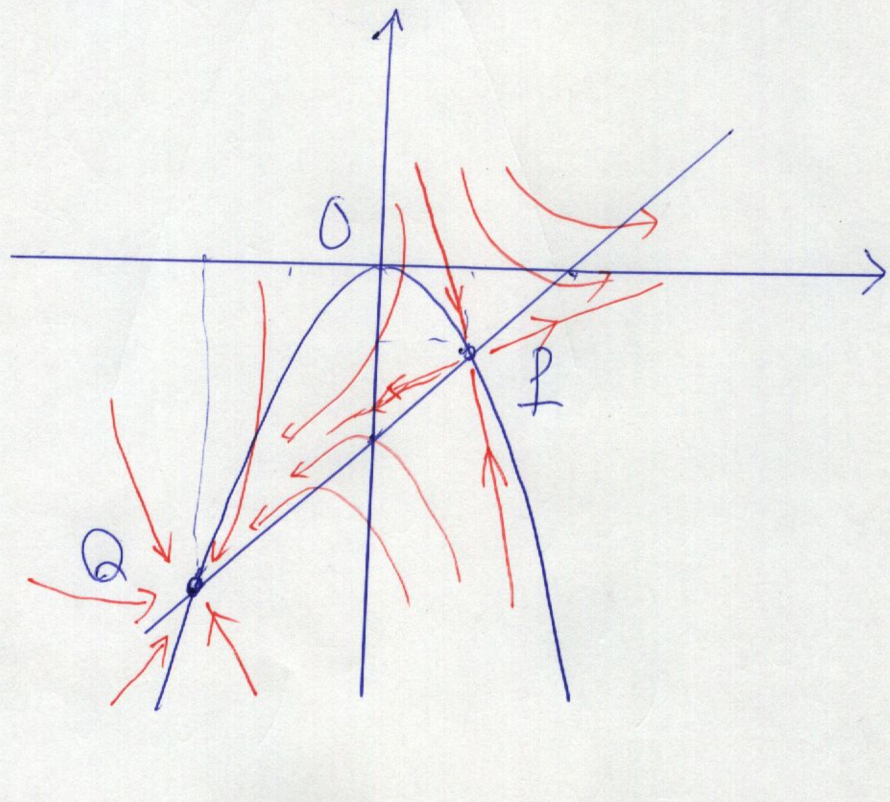
A_1の固有値は　$\lambda=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$　となることがわかり，
正の固有値と負の固有値を1つずつもつ．
∴ Pは鞍点．（安定方向と不安定方向を1つずつもつ）

（ちなみに，$\lambda=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}<0$ に対応する固有ベクトルは $p=\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})\end{pmatrix}$ となることがわかる）

Qでの線形化行列は　$A_2=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$．

A_2の固有値は　$\lambda=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$ となり，
2つとも負となる．
∴ Qは漸近安定となる．

注　以上をふまえると，解軌道の様子は
次のようになることがわかる．



3 次の連立微分方程式を考える.

$$x'(t) = 2y(t) - x(t)^3,$$

$$y'(t) = -x(t) - y(t)^3$$

(1) 平衡点は $(0,0)$ のみであることを示せ. またヌルクラインを xy 平面に描き, 解軌道の様子を調べ図示せよ.

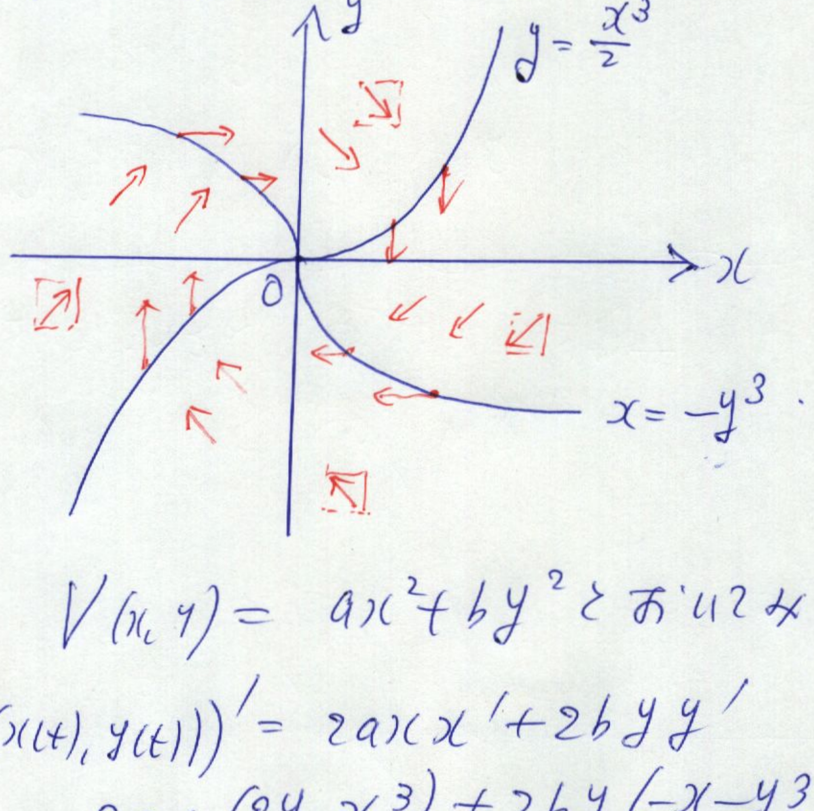
(2) リャプノフ関数 $V(x,y)$ をうまく見つけることで, (1) の平衡点 $(0,0)$ の安定性を調べよ.

(1) $2y = x^3$ 及び $-x - y^3 = 0$ をとくと,

$x = -y^3$ を第1式に代入して. $y(2+y^8) = 0$ $\therefore y = 0$ $\therefore x = 0$

よって. 平衡点は $(0,0)$ のみとわかる.

ヌルクラインと解軌道の様子は以下のとおり



(2) $V(x,y) = ax^2 + by^2$ とおいてみる。.

$$(V(x(t), y(t)))' = 2axx' + 2byy'$$
$$= 2ax(2y - x^3) + 2by(-x - y^3)$$
$$= (4a - 2b)xy - 2ax^4 - 2by^4 \text{ となる}$$

そこで $a = 1$, $b = 2$ ととる. $\therefore V = x^2 + 2y^2$.

このとき $(V(x(t), y(t)))' = -2x^4 - 4y^4 \leqq 0$.

更に $(x,y) \neq (0,0)$ 以外では $(V(x(t), y(t)))' < 0$.

よって $V(x,y)=x^2+2y^2$ はリャプノフ関数となり、

$(0,0)$ は大域的漸近安定であることがわかる。

$\boxed{4}$ (1) 次の境界値問題

$$u''(x) - u(x) = 0,\ 0 < x < 1, \quad u(0) = 0,\ u(1) = 0$$

の解は $u(x) \equiv 0$ のみであることを示せ.

(2) (1) の結果より, $[0,1]$ 上の任意の連続関数 $f(x)$ に対して, 境界値問題

$$u''(x) - u(x) = f(x),\ 0 < x < 1, \quad u(0) = 0,\ u(1) = 0$$

の解 $u(x)$ がただ 1 つ存在することがわかり, グリーン関数 $G(x,t)$ を用いて, $u(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t)\, dt$ と書けることになる. このグリーン関数 $G(x,t)$ を具体的に求めよ.

---

(1) 方程式に u をかけて積分すると.

$$\int_0^1 (u''u - u^2)\,dx = 0,$$

ここで部分積分より $\int_0^1 u''u\,dx = \underbrace{[u'u]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (u')^2 dx.$

← 境界より

となるので $\int_0^1 (u')^2 + u^2\,dx = 0$ となる.

よって $u \equiv 0$ となる.

(2) $u''(x) - u(x) = 0,\quad u(0) = 0,\ u'(0) = 1$

の解は $u(x) = Ae^x + Be^{-x}$ として.

$A + B = 0$ かつ $A - B = 1$. $\therefore A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$.

$\therefore u(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ となる.

一方 $v''(x) - v(x) = 0,\quad v(1) = 0,\ v'(1) = 1$

の解は $v(x) = Ae^x + Be^{-x}$ として

$Ae + Be^{-1} = 0,\quad Ae - Be^{-1} = 1.$

$\therefore A = \frac{1}{2e},\ B = -\frac{e}{2}$ となる

$\therefore v(x) = \frac{1}{2e}e^x - \frac{e}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}(e^{(x-1)} - e^{-(x-1)}).$

$$W = u'v - uv' = \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\times\frac{1}{2}\left(e^{(x-1)}-e^{-(x-1)}\right)$$
$$- \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\times\frac{1}{2}\left(e^{(x-1)}+e^{-(x-1)}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(2e^{-1}-2e\right) = -\frac{1}{2}\left(e-e^{-1}\right)$$ となるので

$$G(x,t) = -\frac{1}{W}\times\begin{cases} u(x)\,v(t) & (0\le x\le t\le 1) \\ u(t)\,v(x) & (0\le t\le x\le 1)\end{cases}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}(e-e^{-1})}\times\begin{cases} \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\times\frac{1}{2}\left(e^{(t-1)}-e^{-(t-1)}\right), & 0\le x\le \cancel{x}\,t\le 1 \\ \frac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)\times\frac{1}{2}\left(e^{(x-1)}-e^{-(x-1)}\right), & 0\le t\le x\le 1.\end{cases}$$

$$\left(= \frac{1}{\sinh 1}\times\begin{cases} \sinh x \sinh(t-1), & 0\le x\le t\le 1 \\ \sinh t \sinh(x-1), & 0\le t\le x\le 1.\end{cases}\right)$$

双曲線関数

となる。 $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$ を用いて表すと.

$\boxed{5}$ 次の連立微分方程式を考え,

$$x'(t) = 10 - x(t) - \frac{4x(t)y(t)}{1+x(t)^2},$$

$$y'(t) = x(t)\left(1 - \frac{y(t)}{1+x(t)^2}\right).$$

(1) $x > 0, y > 0$ の範囲にある平衡点はただ 1 つ存在することがわかり, それを (x^*, y^*) と表す. x^*, y^* を具体的に求めよ. また, $x > 0, y > 0$ の領域において, この微分方程式のヌルクラインの概形を描き, 解軌道の様子を調べよ.

注意: 補助資料のグラフを参考にし, さらに平衡点での 2 つのヌルクラインの傾きの違いに着目すると描きやすい.

(2) 線形化解析によって, 平衡点 (x^*, y^*) の安定性を調べよ.

(3) 4 点 $(0,0), (10,0), (10, 1+10^2), (0, 1+10^2)$ を結んだ長方形の周からなる曲線を C で表す. C 上での解軌道の向きを調べ, 図示せよ. また, 以上のことより, 周期軌道の存在を議論せよ.

---

(1) $10 - x - \frac{4xy}{1+x^2} = 0$ かつ $1 - \frac{y}{1+x^2} = 0$ をとく.

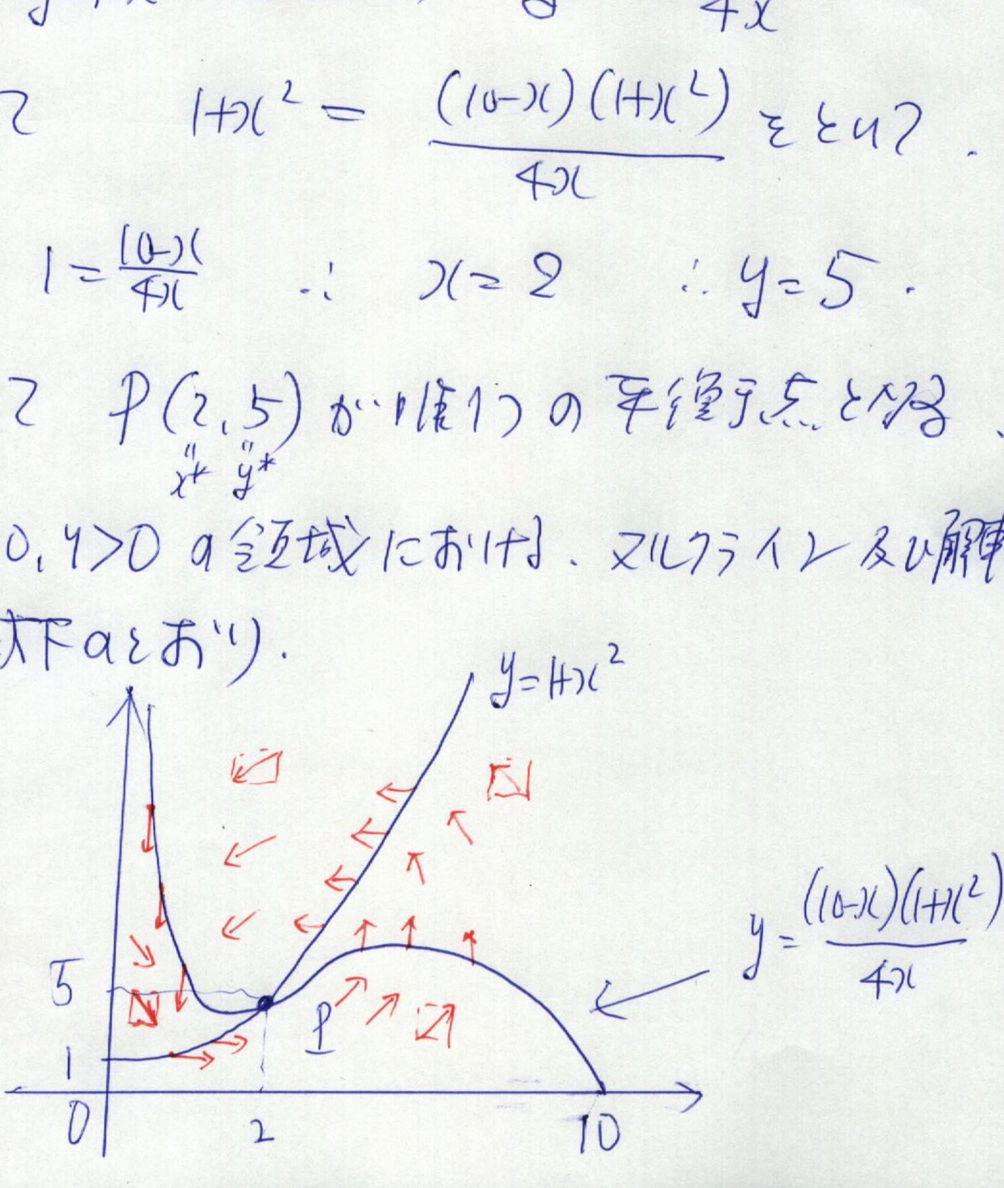
$\therefore y = 1+x^2$ を ~~…~~ から $y = \frac{(10-x)(1+x^2)}{4x}$.

よって $1+x^2 = \frac{(10-x)(1+x^2)}{4x}$ をといて.

$1 = \frac{10-x}{4x}$ $\therefore x = 2$ $\therefore y = 5$.

よって $P(\underset{x^*}{2}, \underset{y^*}{5})$ が唯1つの平衡点となる.

$x>0, y>0$ の領域における. ヌルクライン及び解軌道の様子は以下のとおり.



(2) $f(x,y) = 10 - x - \dfrac{4xy}{1+x^2}$, $g(x,y) = x\left(1 - \dfrac{y}{1+x^2}\right)$

とおくとき

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \dfrac{4y}{1+x^2} + \dfrac{8x^2y}{(1+x^2)^2} & -\dfrac{4x}{1+x^2} \\ \left(1 - \dfrac{y}{1+x^2}\right) + x \cdot \dfrac{2xy}{(1+x^2)^2} & -\dfrac{x}{1+x^2} \end{pmatrix}$$ となるので

$(x^*, y^*) = (2, 5)$ での線形化行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} -1 - \dfrac{20}{5} + \dfrac{8\times4\times5}{5^2} & -\dfrac{8}{5} \\ 2\times\dfrac{4\times5}{5^2} & -\dfrac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{5} & -\dfrac{8}{5} \\ \dfrac{8}{5} & -\dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \quad \left(= \frac{1}{5}\tilde{A} \text{ とおく}\right) \text{ となる.}$$

$\tilde{A}$ の固有値を求めると $\lambda = \dfrac{5}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{175}}{2}$

となるので $P(2,3)$ は不安定渦状点となる.

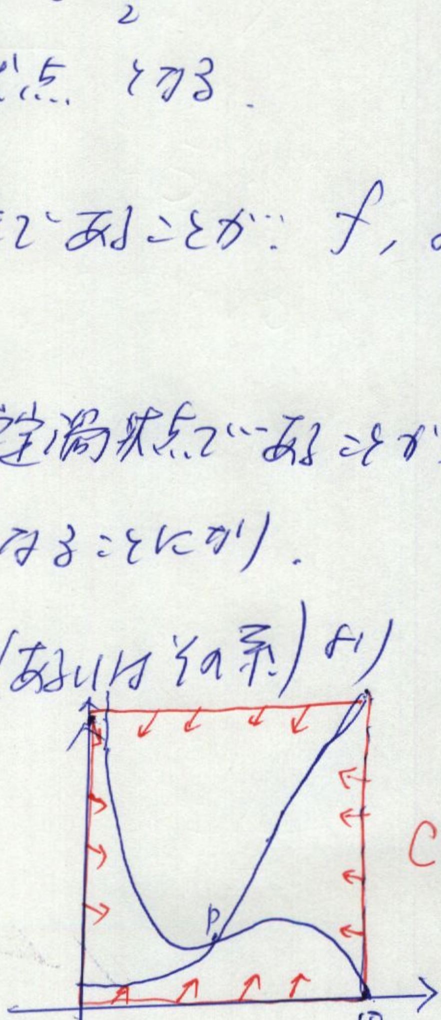
(3) まず C 上では解軌道は内向きであることが f, g の符号よりわかる.

次に (2) の平衡点 $P(2,5)$ が不安定渦状点であることから,

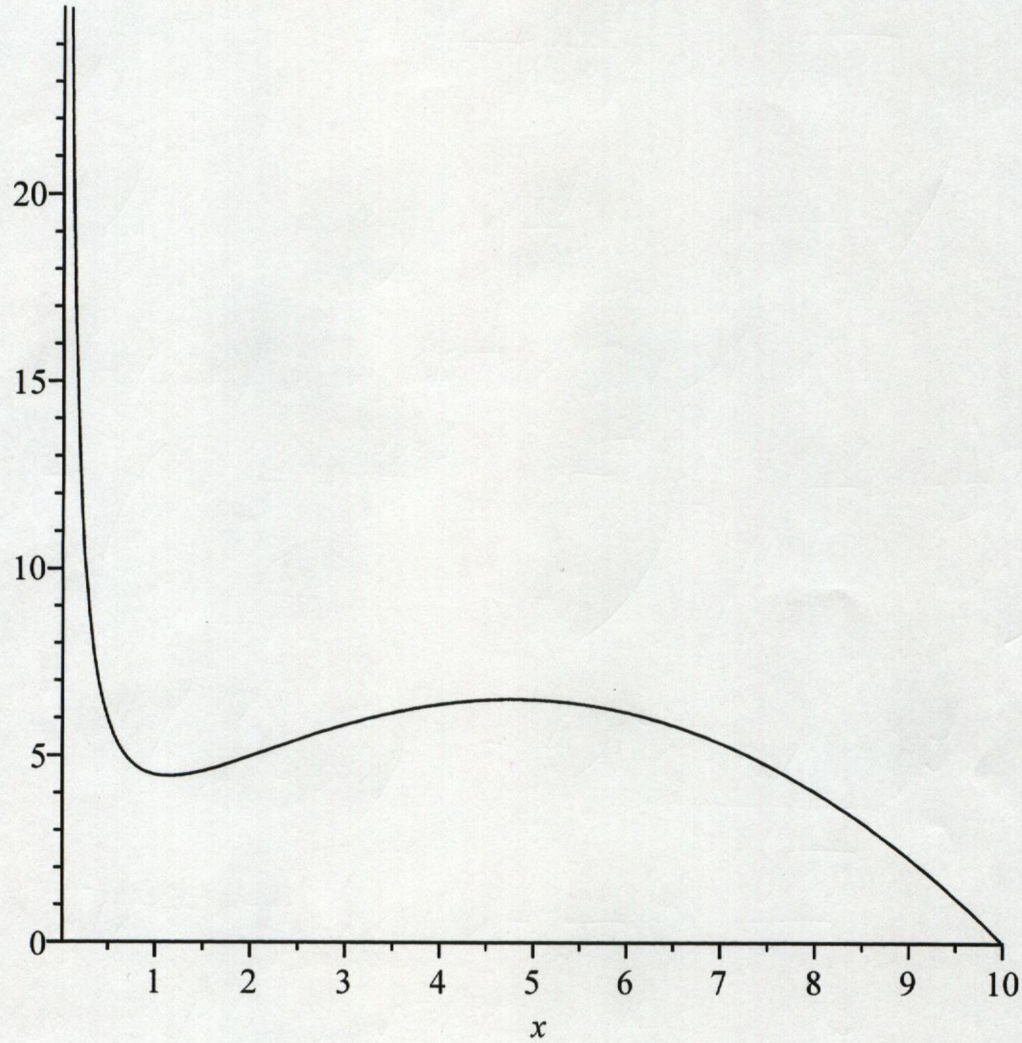
点 P の近くでは解軌道は外向きとなることになり,

ポアンカレ・ベンディクソンの定理（あるいはその系）より

周期軌道の存在がわかる.



```
> plot((10-x)*(1+x^2)/(4*x), x = 0.1 .. 10);
```



$$y = \frac{(10-x)(1+x^2)}{4x} \quad (0 < x < 10)$$

のグラフの概形