

解析学 B 演習問題 No. 4 (2012.11.7)

- 宿題として以下の問題のうち 3 題以上取り組み、次回授業開始前に提出のこと。

問題 D:

1 次の行列 A に対して e^{tA} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2 次の行列 A_j ($j = 1, 2$) に対して, それぞれ $u'(t) = A_j u(t)$ ($j = 1, 2$) の解軌道の様子を調べて図示せよ.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

3 周期 $T = 2\pi$ の関数を成分にもった次の微分方程式を考える.

$$\frac{d}{dt}u(t) = \begin{pmatrix} 1 & (2 + \sin t) \\ 0 & -\frac{\cos t}{2 + \sin t} \end{pmatrix} u(t).$$

- (1) 1 つの基本解行列 $V(t)$ を求めよ.
- (2) モノドロミー行列 C を求め, 周期解が存在するかどうか判定せよ.

4 次の行列 $A(t)$ を考える.

$$A(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 + 3 \cos^2 t & 2 - 3 \sin t \cos t \\ -2 - 3 \sin t \cos t & -2 + 3 \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

- (1) いかなる t に対しても, $A(t)$ の固有値の実部はすべて負となることを確かめよ.
- (2) 次の $V(t)$ が 1 つの基本解行列となることを確かめよ.

$$V(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} \cos t & e^{-t} \sin t \\ -e^{\frac{t}{2}} \sin t & e^{-t} \cos t \end{pmatrix}.$$