解析学 B　演習問題 No. 3 (2012.10.17)

- 宿題として以下の問題のうち 3 題以上取り組み、次回授業開始前に提出のこと。
- 以下の問題で, $a, b > 0$ は定数とする.

問題 C:

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の初期値問題の解の最大存在区間を求めよ.

$$\frac{du(t)}{dt} = -u(t)^2, \quad u(0) = a > 0.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の初期値問題の解は有限時間場爆発する（すなわち, ある有限時間 $T > 0$ が存在して, $u(t)^2 + v(t)^2 \to +\infty$ $(t \to T)$ が成り立つ) ことを示せ.

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t)^2 + v(t)^2, \quad \frac{dv(t)}{dt} = -v(t) + u(t), \quad u(0) = a > 0, v(0) = b > 0.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の初期値問題の解は時間大域的に $t \in [0, +\infty)$ で存在することを説明せよ.

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{u(t)^2}{1 + u(t)^2} - v(t), \quad \frac{dv(t)}{dt} = -v(t) + u(t), \quad u(0) = a > 0, v(0) = b > 0.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 初期条件を $u(0) = a > 0, v(0) = b > 0$ として, 次の初期値問題を考える.

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t) - u(t)(u(t)^2 + v(t)^2), \quad \frac{dv(t)}{dt} = v(t) - v(t)(u(t)^2 + v(t)^2).$$

(1) $W(u, v) = \frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 - \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ と置くとき, $W(u(t), v(t))$ が解の（正の）最大存在区間 $t \in [0, \beta)$ において単調減少であることを示せ.

(2) $\beta = +\infty$ となることを説明せよ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の初期値問題の解は時間大域的に $t \in [0, +\infty)$ で存在することを説明せよ.

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t) - u(t)v(t), \quad \frac{dv(t)}{dt} = -v(t) + u(t)v(t), \quad u(0) = a > 0, v(0) = b > 0.$$