解析学 B　演習問題 No. 2 (2012.10.10)

- 宿題として以下の問題のうち３題以上取り組み、次回の授業開始前に提出すること。

問題 B:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $I \subset \mathbf{R}$ を有界閉区間とする. $u:\ I \to \mathbf{R}^n,\ x_o \in \mathbf{R}^n, \beta > 0$ に対して,

$$\tilde{X} = \{u \in C(I) \mid \|u(t) - x_0\| \le \beta\ (t \in I)\}$$

とおくとき, $\tilde{X}$ は $X = C(I)$ の閉部分集合であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ とベクトル $x \in \mathbf{R}^n$ に対して $y = Ax$ と置くとき, 次の不等式を示せ: $\|y\| \le \|A\|\ \|x\|$. ここで $\|A\| = (\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2)^{1/2}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ C^1 関数 $w(t)$ が, ある正定数 $T > 0$ に対して, 次の条件を満たすとする:

$$|\frac{dw(t)}{dt}| \le |w(t)|,\ 0 \le t \le T, \quad w(0) = 0.$$

このとき, $w(t) \equiv 0\ (0 \le t \le T)$ となることを示せ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (X, d) を完備距離空間とする. パラメータ $\lambda \in J$ (J はある区間とする) をもった写像 $T_\lambda : X \to X$ を考える. 今, パラメータ $\lambda \in J$ によらない定数 $\gamma \in (0,1)$ があって, 次が成り立つとする:

$$d(T_\lambda x, T_\lambda y) \le \gamma d(x,y),\ (x, y \in X, \lambda \in J).$$

さらに $x \in X$ を固定するとき, $T_\lambda x$ は λ に関して連続である仮定する（すなわち, $\lambda' \to \lambda$ のとき, $d(T_{\lambda'} x, T_\lambda x) \to 0$ が成り立つ.)　このとき, 各 $\lambda \in J$ に対して, T_λ が縮小写像であることから, 縮小写像の原理より $T_\lambda u = u$ となる $u \in X$ がただ 1 つ存在することになる. この u を u_λ と書こう. つまり, $T_\lambda u_\lambda = u_\lambda\ (\lambda \in J)$.

このとき, $\lambda' \to \lambda$ のとき, $d(u_{\lambda'}, u_\lambda) \to 0$ が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in \mathbf{R}$ として, $f(x) = |x|^{1/2}$ は局所リプシッツ条件を満たさないことを示せ. また, 初期値問題: $\dfrac{du(t)}{dt} = |u(t)|^{1/2}, \quad u(0) = 0$ の解は一意的でないことを示せ.