

解析学 B 演習問題 No. 1 2012.10.3

- 宿題として以下の問題のうち 3 題以上取り組み、次回の授業開始前に提出すること。

問題 A:

- 1 \mathbf{R} 上の C^1 級関数 $f(x)$ は、局所リプシッツ連続関数であることを示せ。
- 2 $X = \{u \in C[0, 1] \mid u(0) = u(1)\}$ (すなわち、周期 1 の周期的連続関数全体のなす集合) とし、 $d(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$ なる距離をもった距離空間とみる。 X が完備な距離空間であることを示せ。
- 3 実数値関数 $u(t)$ に関する次の初期値問題は、時間局所的に解をもつことを説明せよ:

$$u'(t) = 1 + \sin t + u(t) - u(t)^3, \quad u(0) = 0.$$

- 4 次の初期値問題を 1 階の連立微分方程式に対する初期値問題に書き換えよ。

$$u''(t) - (2 - u(t)^2)u'(t) + u(t) = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1.$$

- 5 $u(t), v(t)$ が以下の連立微分方程式の解であるとする。

$$u'(t) = -u(t)(1 - v(t)), \quad v'(t) = v(t)(1 - u(t)), \quad u(0) = 0.5, \quad v(0) = 0.5.$$

解が存在する限り、 $u(t), v(t) > 0$ となることは認めて、

$$V(t) = u(t) - \log u(t) + v(t) - \log v(t)$$

に対して $V'(t) = 0$ を満たすことを確かめよ。

- 6 $X = C[-1, 1]$ 上で、定数 λ に対して、写像 $T: X \rightarrow X$ を

$$T(f)(x) = \sin(2\pi x) + \lambda \int_{-1}^1 \frac{f(y)}{1 + (x - y)^2} dy$$

で定める。ある $\alpha > 0$ があって $|\lambda| < \alpha$ なるいかなる λ に対しても、 T は X 上の縮小写像になるという。どれだけ大きな α を取ることができるのか？調べよ。