No. 4の解答例

D-[1]

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$ に対して

$$\Phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(-2-\lambda)+5 = \lambda^2+1.$$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{1}{\lambda^2+1} = \frac{1}{(\lambda+i)(\lambda-i)} = \frac{a}{\lambda+i} + \frac{b}{\lambda-i}$$

とおくと

$$1 = a(\lambda-i)+b(\lambda+i)$$

$$\therefore 0=a+b, \quad 1=-ia+ib.$$

$\therefore b=-a$ を代入して $1=(2i)b$

$\therefore b = \frac{1}{2i}, \ a = -\frac{1}{2i}$ となるので

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \left(-\frac{1}{2i}\right)\frac{1}{\lambda+i} + \left(\frac{1}{2i}\right)\frac{1}{\lambda-i}.$$

$$\therefore 1 = \left(-\frac{1}{2i}\right)(\lambda-i) + \left(\frac{1}{2i}\right)(\lambda+i)$$

∴射影行列は

$$\begin{cases} P_1 = -\frac{1}{2i}(A-iI) = -\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2-i & 5 \\ -1 & -2-i \end{pmatrix} \\ P_2 = \frac{1}{2i}(A+iI) = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2+i & 5 \\ -1 & -2+i \end{pmatrix}. \end{cases}$$

よって $e^{tA} = e^{-it}P_1 + e^{it}P_2$ となる.

または オイラーの公式を用いて計算すると.

首都大学東京 大学院理工学研究科数理情報科学専攻

$$e^{tA} = -\frac{1}{2i} e^{-it} \begin{pmatrix} 2-i & 5 \\ -1 & (-2-i) \end{pmatrix} + \frac{1}{2i} e^{it} \begin{pmatrix} 2+i & 5 \\ -1 & -2+i \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{計算略す}}{=} \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t & 5\sin t \\ -\sin t & -2\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$ となる。

注 Aが実行列なので、必ず e^{tA}も実行列となる。

従って $e^{tA} = e^{-it} P_1 + e^{it} P_2$ のままでも悪くはないが、

最終的には実行列として書く方が望ましい。

D- $\boxed{2}$

まず $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ を考える

$$\det|A_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(3+\lambda) - 1$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda + 2$$

$$= (\lambda+2)^2 - 2.$$

$\therefore$ A_1の固有値は

$$\lambda_1 = -2+\sqrt{2} \quad と \quad \lambda_2 = -2-\sqrt{2}$$

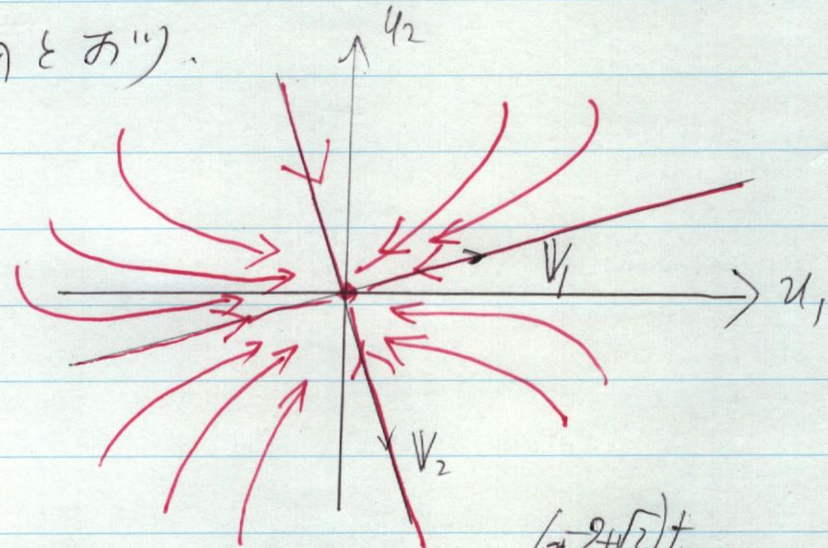
で共に負となる

λ_1に対応する固有ベクトルは $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$.

λ_2 に付随する固有ベクトルは $\quad v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

よって $u' = A_1 u$ の解軌道の様子は

次のとおり.



(一般解は $\quad u(t) = c_1 e^{(-2+\sqrt{2})t} v_1 + c_2 e^{(-2-\sqrt{2})t} v_2$.

とかける.) $\quad$ 初期ベクトル $\quad u(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2$

次に $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える.

$$\det|A_2 - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)+1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2.$$

$\lambda = 1$ に付随する固有ベクトルは

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

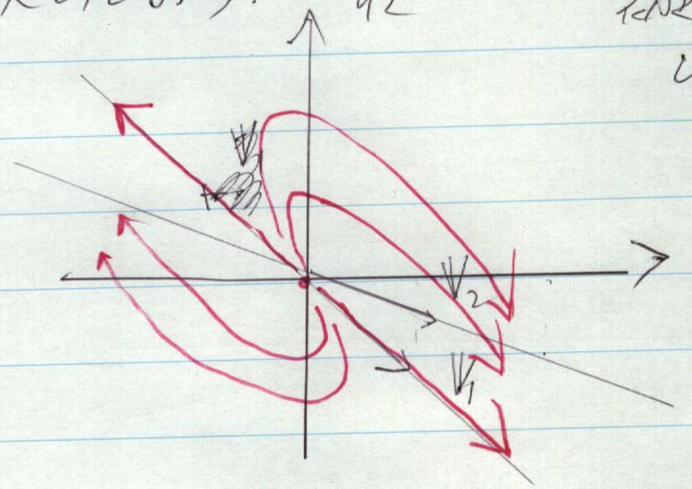
また $\quad (A_2 - I) v_2 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

なる v_2 として $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとる

∴ 一般解は $\quad u(t) = (c_1 + c_2 t) e^t v_1 + c_2 e^t v_2$ となる

よって, $u' = A_2 u$ の解軌道の様子は、

次のとおり。



初期ベクトル
$u(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2$.

D- $\boxed{3}$

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \text{とおく}$$

$$\begin{cases} u_1' = u_1 + (2+\sin t) u_2 \\ u_2' = -\dfrac{\cos t}{(2+\sin t)} u_2 . \end{cases}$$

第2式より

$$\underbrace{\int \frac{du_2}{u_2}}_{\log|u_2(t)|} = -\int \frac{\overset{(2+\sin t)'}{\cos t}}{(2+\sin t)} dt = -\log(2+\sin t) + C_0$$

$$\therefore |u_2(t)|(2+\sin t) = e^{C_0}$$

$$\therefore u_2(t) = \frac{\pm e^{C_0}}{2+\sin t} = \frac{C_1}{2+\sin t}.$$

このとき $u_1' = u_1 + C_1$

$$\therefore\ (e^{-t}u_1)' = c_1 e^{-t}.$$

$$\therefore\ e^{-t}u_1 = -c_1 e^{-t} + c_2.$$

$$\therefore\ u_1(t) = -c_1 + c_2 e^{t}$$

よって 一般解は

$$\begin{cases} u_1(t) = -c_1 + c_2 e^{t} \\ u_2(t) = \dfrac{c_1}{2+\sin t} \end{cases}$$ となる.

従って $c_1=1, c_2=0$ のときの解 $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{1}{2+\sin t} \end{pmatrix}$

と $c_1=0, c_2=1$ のときの解 $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

が2つの独立な解となるので

$$V(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{t} \\ \dfrac{1}{2+\sin t} & 0 \end{pmatrix}$$

は1つの基本解行列となる.

(2) モノドロミー行列 C は.

$$C = V(0)^{-1}V(2\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & e^{2\pi} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & e^{2\pi} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi} \end{pmatrix}.$$

となる。よって、Cが1を固有値にもつので

周期解をもつ。

(注) 実は(1)の解答で既に $u(t)=\begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{1}{2+\sin t} \end{pmatrix}$ が解であることがわかったので、これから明らかに周期 2π の周期解をもっている。

D-$\boxed{4}$

(1) $\mathrm{tr}(A(t))=\frac{1}{2}(-4+3)=-\frac{1}{2}$,

$$\det(A(t))=\left(\frac{1}{2}\right)^2\Big\{(-2+3\cos^2 t)(-2+3\sin^2 t)+(2-3\sin t\cos t)(2+3\sin t\cos t)\Big\}$$

$$=\frac{1}{4}\Big\{4-6\sin^2 t-6\cos^2 t+\cancel{9\cos^2 t\sin^2 t}+4-\cancel{9\sin^2 t\cos^2 t}\Big\}$$

$$=\frac{1}{4}(8-6)=\frac{1}{2}$$ となるので

$$\det|\lambda I-A(t)|=\lambda^2-(\mathrm{tr}A(t))\lambda+\det(A(t))$$

$$=\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}=\left(\lambda+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}$$

$$=\left(\lambda+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}$$ となる。

従って いかなる t に対しても $A(t)$ の固有値は $-\frac{1}{4}\pm i\frac{\sqrt{7}}{4}$。

~~答~~：$A(t)$の固有値の実部は常に負となる。

(2) $u_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}}\cos t \\ -e^{\frac{t}{2}}\sin t \end{pmatrix}$, $u_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$ とおいて.

$u_1(t)$ も $u_2(t)$ も $\dfrac{du_1(t)}{dt} = A(t)u_1(t)$, $\dfrac{du_2(t)}{dt} = A(t)u_2(t)$

をみたすことを確める。

$$\frac{d}{dt}u_1(t) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\cos t - \sin t\right)e^{\frac{t}{2}} \\ \left(-\frac{1}{2}\sin t - \cos t\right)e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

一方 $A(t)u_1(t) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2+3\cos^2 t & 2-3\sin t\cos t \\ -2-3\sin t\cos t & -2+3\sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}}\cos t \\ e^{\frac{t}{2}}\sin t \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}}\{\cos t(-2+3\cos^2 t) - \sin t(2-3\sin t\cos t)\} \\ e^{\frac{t}{2}}\{\cos t(-2-3\sin t\cos t) - \sin t(-2+3\sin^2 t)\} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}}\{-2\cos t - 2\sin t + 3\cos t\,(\overbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}^{1})\} \\ e^{\frac{t}{2}}\{-2\cos t \underbrace{- 3\sin t\cos^2 t + 2\sin t - 3\sin^3 t}_{\text{合わせて } -3\sin t}\} \end{pmatrix}$$

$= \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}}(\cos t - 2\sin t) \\ e^{\frac{t}{2}}(-\sin t - 2\cos t) \end{pmatrix}$ より 確かに $\dfrac{du_1}{dt} = A(t)u_1(t)$ をみたす。

同様に

$$\frac{d}{dt}u_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}(-\sin t + \cos t) \\ e^{-t}(-\cos t - \sin t) \end{pmatrix}.$$

一方 $A(t)u_2(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2+3\cos^2 t & 2-3\sin t\cos t \\ -2-3\sin t\cos t & -2+3\sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}\{\sin t(-2+3\cos^2 t)+\cos t(2-3\sin t\cos t)\} \\ e^{-t}\{\sin t(-2-3\sin t\cos t)+\cos t(-2+3\sin^2 t)\} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}(-2\sin t+2\cos t) \\ e^{-t}(-2\sin t-2\cos t) \end{pmatrix}.$$

$\therefore$ $\frac{du_2}{dt} = A(t)u_2(t)$ が確かめられた.

特に $V(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則行列なので

$V(t)$ は基本解行列となることが結論される.

注 (1)より $A(t)$ の固有値の実部は常に負なので

定数行列の場合にそうであったように

$\frac{d}{dt}u(t) = A(t)\,u(t)$ の解も $\|u(t)\| \to 0\ (t\to+\infty)$ が言えると思うかも知れないが,

(2)の $\|u_1(t)\| = e^{\frac{t}{2}} \to +\infty\ (t\to+\infty)$ なることに注意!!