No.3の解答例

C-$\boxed{1}$

$$u' = -u^2, \quad u(0) = a > 0.$$

$$\int_0^t \frac{u'(t)}{u^2(t)}\,dt = -\int_0^t 1\,dt = -t.$$

$$\parallel$$

$$\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{1}{u^2}\,du \qquad \int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u} \text{ より}$$

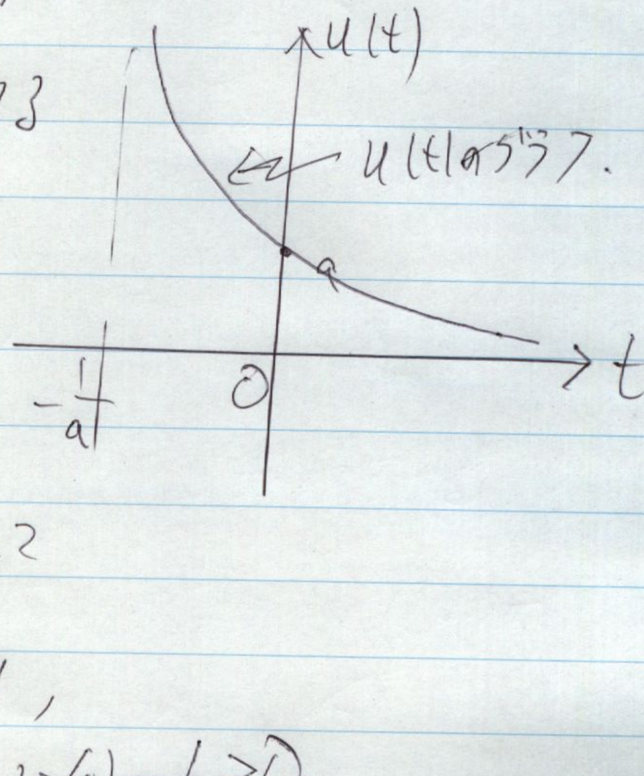
$$-\frac{1}{u(t)} + \frac{1}{u(0)} = -t \quad \text{となる。}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{u(0)} + t = \frac{1}{u(t)} \qquad \therefore \quad u(t) = \frac{1}{\frac{1}{u(0)} + t}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{a} + t}$$

従って解の最大存在区間は

$\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ となる



C-$\boxed{2}$

$$\begin{cases} u' = u^2 + v^2 \\ v' = -v + u, \end{cases}$$

$$u(0) = a > 0, \quad v(0) = b > 0.$$

解の $t \geqq 0$ での最大存在区間を $[0, \beta)$ とする.

このとき. $u'(t) = u^2(t) + v^2(t) \geqq u^2(t)$ となる,
$(0 \leqq t < \beta)$

特に $u(0) = a > 0$ で $u'(t) \geqq 0 \ (0 \leq t < \beta)$

より $u(t)$ は単調増加となり $u(t) \geqq u(0) = a$ となる.
$(0 \leq t < \beta)$

∴ 上の不等式を $u^2(t) (\geqq a > 0)$ で割ることが

できて $$\frac{u'(t)}{u^2(t)} \geqq 1 \quad (0 \leq t < \beta)$$

となる。

これを $0 < {}^\forall\alpha < \beta$ に対して $0 \leqq t \leq \alpha$ で積分し.

$$\underbrace{\int_0^\alpha \frac{u'(t)}{u^2(t)} dt}_{\parallel} \geqq \alpha$$

$$\int_{u(0)}^{u(\alpha)} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u(\alpha)} + \frac{1}{u(0)}$$

$$\therefore -\frac{1}{u(\alpha)} + \underbrace{\frac{1}{u(0)}}_{= \frac{1}{a}} \geqq \alpha \quad (0 < {}^\forall\alpha < \beta)$$

$$\therefore \frac{1}{a} - \alpha \geqq \frac{1}{u(\alpha)}. \quad (0 < {}^\forall\alpha < \beta) \cdots \#$$

となるが $\alpha \geqq \frac{1}{a}$ で (左辺) は負となり (0 又は) $u(\alpha) > 0$ に矛盾するので $\alpha < \frac{1}{a}$ となる。

αは $0<\alpha<\beta$ なる任意の値であったので $\alpha \nearrow \beta$ として

$\beta \leqq \dfrac{1}{a}$ をうる。 故に $\beta<+\infty$ となる。

よって、また このとき $u(t)^2+v^2(t) \longrightarrow +\infty \quad (t \nearrow \beta)$

が成りたつ。 (← 授業ノート 系11 参照). $\boxed{//}$

(注) vの方の微分方程式は、結局 何であっても同じ結論が成りたつことになる。

(証明で全く使ってないから!)

C-$\boxed{3}$

$$\begin{cases} u' = \dfrac{u^2}{1+u^2} - v \quad \left(= f^1(u,v)\right) \\ v' = -v+u, \quad \left(= f^2(u,v) \text{ とおく}\right) \\ u(0)=a>0, \quad v(0)=b>0. \end{cases}$$

$f^1(u,v) = 1-\dfrac{1}{1+u^2} - v$ とかけるので、

$\dfrac{\partial f^1}{\partial u} = \dfrac{2u}{(1+u^2)^2}$ となり $2|u| \leqq 1+u^2 \quad (\forall u \in \mathbb{R})$

より $\left|\dfrac{\partial f^1}{\partial u}(u,v)\right| \leqq \dfrac{1}{1+u^2} \leqq 1 \quad (\forall u,v \in \mathbb{R})$

また $\left|\dfrac{\partial f^1}{\partial v}(u,v)\right| = |-1| = 1.$

$$\left|\frac{\partial f^2}{\partial u}\right| = 1, \quad \left|\frac{\partial f^2}{\partial v}\right| = |-1| = 1.$$

なので $\forall (u,v), (\hat{u},\hat{v}) \in \mathbb{R}^2$ に対して

Taylorの定理より, $\exists \theta \in (0,1)$ s.t

$$f^1(u,v) - f^1(\hat{u},\hat{v})$$

$$= \frac{\partial f^1}{\partial u}\left(\hat{u}+\theta(u-\hat{u}), \hat{v}+\theta(v-\hat{v})\right)(u-\hat{u})$$

$$+ \frac{\partial f^1}{\partial v}\left(\hat{u}+\theta(u-\hat{u}), \hat{v}+\theta(v-\hat{v})\right)(v-\hat{v}),$$

$$\therefore \left|f^1(u,v) - f^1(\hat{u},\hat{v})\right|$$

$$\leq |u-\hat{u}| + |v-\hat{v}|$$

$$\leq 2\,\|(u,v)-(\hat{u},\hat{v})\| \quad \text{となる.}$$

$$\left(= \sqrt{(u-\hat{u})^2 + (v-\hat{v})^2}\right)$$

同様にして

$$\left|f^2(u,v) - f^2(\hat{u},\hat{v})\right|$$

$$\leq 2\,\|(u,v)-(\hat{u},\hat{v})\|$$

が成り立つので

$$\|f(u,v) - f(\hat{u},\hat{v})\| = \sqrt{\left(f^1(u,v)-f^1(\hat{u},\hat{v})\right)^2 + \left(f^2(u,v)-f^2(\hat{u},\hat{v})\right)^2}$$

$$\leq \sqrt{8}\,\|(u,v)-(\hat{u},\hat{v})\| \quad \text{となる}$$

$\left(\forall (u,v), (\hat{u},\hat{v}) \in \mathbb{R}^2\right)$

すなわち、この $f(u,v)$ は 大域的リプシッツ条件を満たす

ので、(系12 より)

解は大域解をもつことがわかる。 □

C-4

$$\begin{cases} u' = u - u(u^2+v^2) \\ v' = v - v(u^2+v^2) \end{cases}$$

$u(0)=a>0,\quad v(0)=b>0.$

(1) $W(u,v) = \frac{1}{4}(u^2+v^2)^2 - \frac{1}{2}(u^2+v^2)$ に対して

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{1}{2}(u^2+v^2)\times(2u) - u$$

$$= u(u^2+v^2) - u,$$

$$\frac{\partial W}{\partial v} = \frac{1}{2}(u^2+v^2)\times(2v) - v$$

$$= v(u^2+v^2) - v$$ となるので

$$\frac{d}{dt}\{W(u(t),v(t))\} = \frac{\partial W}{\partial u}(u(t),v(t))\,u'(t) + \frac{\partial W}{\partial v}(u(t),v(t))\,v'(t)$$

$$= \{u(u^2+v^2)-u\}\{u-u(u^2+v^2)\} + \{v(u^2+v^2)-v\}\{v-v(u^2+v^2)\}$$

$$= -\{u - u(u^2+v^2)\}^2 - \{v - v(u^2+v^2)\}^2$$

$$\leqq 0. \quad (0 \leqq {}^\forall t < \beta)$$ となる。

∴ $W(u(t), v(t))$ は t に関し単調減少

となる。

(2) (1) より 特に

$$W(u(t), v(t)) \leqq W(\underbrace{u(0)}_{a}, \underbrace{v(0)}_{b}) < +\infty$$

となる。 $(0 \leqq {}^\forall t < \beta)$

$$\therefore \frac{1}{4}(u^2(t)+v^2(t))^2 - \frac{1}{2}(u^2(t)+v^2(t)) \leqq W(a,b).$$

となる。 $(0 \leqq {}^\forall t < \beta)$

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{4}\{(u^2(t)+v^2(t))^2 - 2(u^2(t)+v^2(t))\}$$

$$= \frac{1}{4}[\{(u^2+v^2)-1\}^2 - 1]$$ なので

$$\{(u^2(t)+v^2(t))-1\}^2 \leqq 1 + 4|W(a,b)|$$

$$\therefore |(u^2(t)+v^2(t))-1| \leqq \sqrt{1+4|W(a,b)|} \equiv C_0 < +\infty$$ とおく。

$\therefore\ (u^2(t)+v^2(t))^{*} \leqq 4t\,C_0$ をうる。

$(0 \leqq \forall t < \beta)$

このことから.（系11を用いて）$\beta=+\infty$

をうる.

$\boxed{\text{し}}$

C-$\boxed{5}$

$$\begin{cases} u' = u - uv \\ v' = -v + uv \end{cases}$$

$u(0)=a>0,\ v(0)=b>0.$

この微分方程式に対しては、No.1 $\boxed{5}$

でもでてきたように

$$V(t) = u(t) - \log u(t) + v(t) - \log v(t)$$

とおくと、，$u(t)>0,\ v(t)>0$ なる限り.

$$V'(t) = u' - \frac{u'}{u} + v' - \frac{v'}{v}$$

$$= \left(1-\frac{1}{u}\right)(u-uv) + \left(1-\frac{1}{v}\right)(-v+uv)$$

$$= (u-1)(1-v) + (v-1)(-1+u) = 0$$

となる。

今 $f(x) = x - \log x \quad (x>0)$

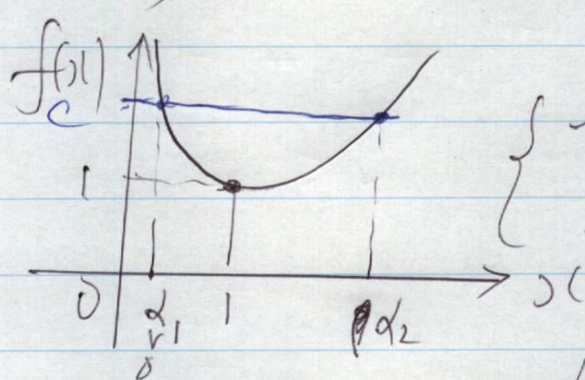
という関数を考えると.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

より. $f'(1)=0$, $f'(x)<0 \ (0<x<1)$, $f'(x)>0 \ (x>1)$

となり. $f(1) = 1 - \underbrace{\log 1}_{0} = 1$ と合わせて.

グラフの概形は、次のようになる。



$$\begin{cases} \lim_{x\to+0} f(x) = +\infty. \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad f(x) = x\Big(1-\underbrace{\frac{\log x}{x}}_{0}\Big) \end{cases}$$

にも注意.

今, $0 \leqq t < t^*$ では

少なくとも十分小さな $t^*>0$ に対して

$u(t)>0$, $v(t)>0$ としてよいが…

$$\underbrace{V(t)}_{\parallel} = V(0) = (a-\log a)+(b-\log b)$$

$f(u(t)) + f(v(t))$ とかける. $\quad (= \underbrace{f(a)+f(b)}_{\parallel\!|})$

$(0 \leqq t < t^*)$ $\quad c$ とおく.

となる。

故に $\quad f(u(t)) \leqq c$ かつ $f(v(t)) \leqq c$

となり, 図の α_1, α_2 に対して. $\alpha_1 \leqq u(t)$, $v(t) \leqq \alpha_2$

となる。

このことは、$u(0)=a$, $v(0)=b$ から出発して、
解の存在区間において、常に

$$\alpha_1 \leqq u(t),\ v(t) \leqq \alpha_2$$
$$(0 \leqq \forall t < \beta)$$

となることを示している。

従って特に $\sup_{0 \leqq t < \beta} \|(u(t), v(t))\| \leqq \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_2^2}$
$= \sqrt{2}\alpha_2 < \infty$

となることになり、系11より

$\beta = +\infty$ となる。