No. 2の解答例

B-[1]

$\{ u \in C(I) \mid \|u(t) - x_0\| \leqq \beta \ (\forall t \in I) \}$.

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \widetilde{X}$ が あるu $\in C(I)$ に

対して $\max_{t \in I} \|u_n(t) - u(t)\| \to 0 \ (n \to \infty)$ ならば

$u \in \widetilde{X}$ を示せばよい。

仮定より $\|u_n(t) - x_0\| \leqq \beta \quad (\forall n \geqq 1, \forall t \in I)$.

よって,

$$
\begin{aligned}
\|u(t) - x_0\| &\leqq \|u(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - x_0\| \\
&\leqq \|u(t) - u_n(t)\| + \beta \\
&\leqq \max_{t \in I} \|u(t) - u_n(t)\| + \beta. \\
&\xrightarrow[(n \to \infty)]{} \beta. \quad (\forall t \in I).
\end{aligned}
$$

となるので $u \in \widetilde{X}$ が示された。

B-[2]

$y = Ax$ に対し

$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ なので

$$|y_i| \leqq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \underbrace{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}}_{= \|x\|} \quad (\forall i).$$

よって $|y_i|^2 \leqq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right) \times \|x\|^2 \quad (\forall i)$

i に関する和をとって

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}_{=\|y\|^2} \leqq \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)}_{=\|A\|^2} \times \|x\|^2$$ となる。

$$\therefore \|y\| \leqq \|A\|\|x\| . \quad \square$$

B-$\boxed{3}$

微分積分の基本公式より

$$W(t) - \underbrace{W(0)}_{=0} = \int_0^t \frac{dW(s)}{ds} ds$$ が成り立つ.

よって.
$$|W(t)| \leqq \int_0^t \left|\frac{dW(s)}{ds}\right| ds \quad (0 \leqq t \leqq T)$$
$$\underset{仮定より}{\leqq} \int_0^t |W(s)| ds .$$

$\Phi(t) \equiv \int_0^t |W(s)| ds$ とおくと $\Phi'(t) = |W(t)|$

なので

$$\begin{cases} \Phi'(t) \leqq \Phi(t) \quad (0 \leqq t \leqq T) \\ かつ \ \Phi(0) = 0 \end{cases}$$ となる.

$$\therefore \underbrace{\Phi'(t) - \Phi(t)}_{\parallel} \leqq 0 \quad (0 \leqq t \leqq T)$$

$$\underbrace{e^{t} \times \frac{d}{dt}\{e^{-t}\Phi(t)\}}$$ に注意すると、

注 グロンウォールの不等式の証明と同じ!

$$\frac{d}{dt}\{e^{-t}\Phi(t)\} \leqq 0 \quad (0 \leqq t \leqq T)$$

となる。 $\therefore e^{-t}\Phi(t) \leqq e^{-0}\underbrace{\Phi(0)}_{\substack{\parallel \\ 0}} \quad (0 \leqq t \leqq T)$

$\Phi(t) \geqq 0$ なので、 $\Phi(t) \equiv 0$ が結論され

$\therefore \Phi'(t) \; (= |w(t)|) = 0$ となる。

$\therefore w(t) \equiv 0 \quad (0 \leqq t \leqq T)$ となる。 $\boxed{\text{証}}$

B-$\boxed{4}$

各 $\lambda \in J$ に対して、T_λ の不動点（$T_\lambda u = u$ となる u）が u_λ なので $T_\lambda u_\lambda = u_\lambda \quad (\forall \lambda \in J)$.

このとき、
$$d(u_{\lambda'}, u_\lambda) = d(T_{\lambda'}u_{\lambda'}, T_\lambda u_\lambda)$$
$$\leqq d(T_{\lambda'}u_{\lambda'}, T_{\lambda'}u_\lambda) + d(T_{\lambda'}u_\lambda, T_\lambda u_\lambda)$$
$$\underset{\text{仮定より}}{\leqq} \gamma\, d(u_{\lambda'}, u_\lambda) + d(T_{\lambda'}u_\lambda, T_\lambda u_\lambda)$$

$(\forall \lambda, \lambda' \in J)$ となる。

$\therefore \underset{\substack{\vee \\ 0}}{(1-\nu)}\, d(u_{\lambda'}, u_\lambda) \leqq d(T_{\lambda'} u_\lambda, T_\lambda u_\lambda)$ となる。

今，λ を固定して，$\lambda' \to \lambda$ なるとき，$u_\lambda \in X$ は固定されて~~いる~~いるので，仮定より $d(T_{\lambda'} u_\lambda, T_\lambda u_\lambda) \to 0$ となる。

よって上式より $d(u_{\lambda'}, u_\lambda) \to 0 \quad (\lambda' \to \lambda)$ となる。 $\square$

B-$\boxed{5}$

$f(x) = |x|^{1/2}$ が局所リプシッツ条件をみたすとしたら，例えば $|x|, |x'| \leqq 1$ に対し

ある定数 $L > 0$ が存在して

$$|f(x) - f(x')| \leqq L|x - x'|$$

が成立しなくてはならない。

よって特に $x' = 0$ として $f(x') = 0$ より

$$(|x|^{1/2} =)\, |f(x)| \leqq L|x| \quad (\forall |x| \leqq 1)$$

でなくてはならないが，$1 > x > 0$ で $x \to 0$ とすると

$$\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = \frac{|x|^{1/2}}{|x|} \leqq L$$ となり矛盾。

$\therefore$ $f(x) = |x|^{1/2}$ は局所リプシッツでない

$$(*)\ \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = |u(t)|^{1/2}, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

は $u(t) \equiv 0$ を1つの解としてもつが：

$\forall c > 0$ に対し，$u_c(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqq c) \\ \frac{1}{4}(t-c)^2 & (t \geqq c) \end{cases}$

と考えると．$u_c \in C^1(\mathbb{R})$ で $u(0)=0$ かつ

$t \geqq c$ では $\dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{1}{2}(t-c) = |u_c(t)|^{1/2}$ をみたすので解となる．

もちろん $u_c(t) \not\equiv 0$ なので

$(*)$ の解は一意的でない。

（$c>0$ は何でもいいので無限個の異なる解を $(*)$ はもつことになる。）