No.1の解答例.

A-$\boxed{1}$

任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}$ に対し,
(有界閉)

$|x| \leqq M \quad (x \in K)$ なる M が存在するので

$C = \max_{|z| \leqq M} |f'(z)|$ とおくと.

$\forall x, y \in K$ に対し, 平均値の定理より

$$|f(x) - f(y)| = |f'(y + \theta(x-y))(x-y)|$$

なる $\theta \in (0,1)$ が存在するが $|z| = |y + \theta(x-y)|$
$= |(1-\theta)y + \theta x| \leqq M$

となるので
$|f'(y+\theta(x-y))| \leqq C$ となるから.

$$|f(x) - f(y)| \leqq C|x-y| \quad (\forall x, y \in K)$$

をうる.

このことは f が局所リプシッツ連続であることを示している.

A-$\boxed{2}$

略

A-$\boxed{3}$

$f(t, x) = 1 + \sin t + x - x^3$ が C^1級なので

x に関して, 局所リプシッツ条件をみたすので

解析的局所解の存在が言える.

A-$\boxed{4}$

$$u_1(t)=u(t),\quad u_2(t)=u'(t)$$ とくと

$$u''-(2-u^2)u'+u=0,\quad u(0)=1,\ u'(0)=-1$$

は, 連立微分方程式

$$\begin{cases} u_1'=u_2 \\ u_2'=(2-u_1^2)u_2-u_1 \end{cases}$$

$$u_1(0)=1,\quad u_2(0)=-1$$

にかきかえられる.

A-$\boxed{5}$ 略答 (→ No.3 の C-$\boxed{5}$ の解答参照)

A-$\boxed{6}$

$$d(f,g)=\max_{-1\leq x\leq 1}|f(x)-g(x)|$$ とする。

$$(Tf)(x)-(Tg)(x)$$
$$=\lambda\int_{-1}^{1}\frac{f(y)-g(y)}{1+(x-y)^2}dy$$ となるので

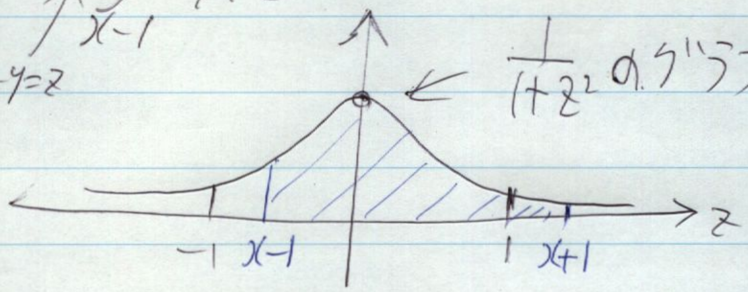
$$|(Tf)(x)-(Tg)(x)| \leq |\lambda| \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+(x-y)^2}\, dy \right) \times d(f,g)$$

$$(\forall x \in [-1,1])$$

となる。

ここで $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+(x-y)^2}\, dy = \int_{x-1}^{x+1} \frac{1}{1+z^2}\, dz$ に注意。

$x-y=z$



図の面積を考えると

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+(x-y)^2}\, dy = \int_{x-1}^{x+1} \frac{1}{1+z^2}\, dz$$

が最大となるのは

$x=0$ のときで、値は

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+z^2}\, dz = \left[\tan^{-1} z\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

となる。

$$\therefore |(Tf)(x)-(Tg)(x)| \leq |\lambda| \times \frac{\pi}{2}\, d(f,g)$$

$$(\forall x \in [-1,1]).$$

$\therefore\ d(Tf, Tg) \leq \frac{\pi}{2}|\lambda|\, d(f,g)$ となる。

$\therefore\ \frac{\pi}{2}|\lambda| < 1 \iff |\lambda| < \frac{2}{\pi}$ より

$\alpha = \frac{2}{\pi}$ にとれば $|\lambda| < \alpha$ なら T は縮小写像になる

(注) この $\alpha = \frac{2}{\pi}$ (i.e. 条件 $|\lambda| < \frac{2}{\pi}$)

は 最良である！

つまり、$\lambda = \frac{2}{\pi}$ とすれば、

例えば $f(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 1$ とすると

$d(f, g) = 1$ であり、また

$d(Tf, Tg) = 1$ となることがわかるので、

縮小写像にはならない。