微分積分II　補助演習問題 No. 6 解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 曲面 $z=x^2+4y^2$ と曲面 $z=8-x^2-4y^2$ とで囲まれる部分を G とするとき,

$$G=\{(x,y,z)\mid x^2+4y^2\leqq z\leqq 8-x^2-4y^2\}.$$

このとき, まず (x,y) の動く領域 D を求める. $x^2+4y^2\leqq 8-x^2-4y^2$ は, $x^2+4y^2\leqq 4$ と同値である. よって $D=\{(x,y)\mid x^2+4y^2\leqq 4\}$. 従って G の体積 V は

$$V=\iint_D(8-x^2-4y^2-(x^2+4y^2))\,dx\,dy=\iint_D(8-(2x^2+8y^2))\,dx\,dy$$

となる. ここで変数変換 $x=u, 2y=v$ として

$$V=\iint_{u^2+v^2\leqq 1}(8-2(u^2+v^2))\times\frac{1}{2}\,du\,dv=2\pi\int_0^2(4-r^2)r\,dr=8\pi$$

を得る.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 曲面: $z=x^2+y^2$, $(x^2+y^2\leqq 1)$ の曲面積を A とするとき,

$$A=\iint_{x^2+y^2\leqq 1}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy=\iint_{x^2+y^2\leqq 1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

$$=2\pi\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\;r\,dr=2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

(2) 曲面（三角形）: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $(x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0)$ の曲面積を A とするとき, $z=c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}), (x,y)\in D=\{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leqq 1\}$ と書けるので,

$$A=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy=\iint_D\sqrt{1+(\frac{c}{a})^2+(\frac{c}{b})^2}\,dx\,dy$$

$$=\sqrt{1+(\frac{c}{a})^2+(\frac{c}{b})^2}\times\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1-x^2\}$ に対して, その重心を $(\overline{x},\overline{y})$ とすると, A を D の面積として

$$\overline{x}=\frac{1}{A}\iint_D x\,dx\,dy,\quad \overline{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,dx\,dy$$

である.

$$A = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}.$$

また

$$\iint_D x\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} (\int_0^{1-x^2} x\, dy)\, dx = 0,$$

$$\iint_D y\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} (\int_0^{1-x^2} y\, dy)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1 - x^2)^2\, dx = \frac{8}{15}.$$

よって

$$\overline{x} = 0, \quad \overline{y} = \frac{(\frac{8}{15})}{(\frac{4}{3})} = \frac{2}{5}$$

となる.