

# 微分積分I ( b ~ h ) : 演習問題 No. 13

- 以下の問題のうち指定された問題のみを時間内に解答して提出せよ.
- 残りの問題は自主教材とする.

1  $C^2$  級の2変数関数  $z = f(x, y)$  と定数  $a, b, c, d$  に対し,  $x = au + bv, y = cu + dv$  とする.

(1)  $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$  を  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, a, b, c, d$  を用いて表せ.

(2)  $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$  を  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, a, b, c, d$  を用いて表せ.

(3)  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  が直交行列のとき,  $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  が成り立つことを示せ.

2 次の関数  $f(x, y)$  の第2次までの偏導関数をすべて求めよ.

(1)  $f(x, y) = x^5 y^4$

(2)  $f(x, y) = e^{2x} \cos y$

(3)  $f(x, y) = x^y \quad (x > 0)$

(4)  $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$

3 次の合成関数について  $\frac{dz}{dt}$  を求めよ.

(1)  $z = x^2 - y^2, x = 2t + 1, y = 3t - 5$

(2)  $z = \log \sqrt{x^2 + y^2}, x = \cosh t, y = \sinh t$

4  $C^1$  級の1変数関数  $g(z)$  に対して, 次が成り立つことを示せ.

(1)  $w = g(x^2 - y^2)$  ならば,  $yw_x + xw_y = 0$ .

(2)  $w = x^n g\left(\frac{y}{x}\right)$  ( $n$  は自然数) ならば,  $xw_x + yw_y = nw$ .

5  $C^2$  級の2変数関数  $z = f(x, y)$  に対して,  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  とするとき, 次が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$