微分積分I（b ～ h）：演習問題 No. 1

- 以下の問題のうち指定された問題のみを時間内に解答して提出せよ．
- 残りの問題は自主教材とする．次回の授業までに各自で解いておくこと．

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1,\ a_n = \sqrt{2a_{n-1}+3}$（$n \geqq 2$）で定める．

(1) $1 \leqq a_n \leqq 3$ を示せ．

(2) $\{a_n\}$ は単調増加数列であることを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ は収束することを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ とする．数列 $\{a_n\}$ が単調減少数列であることを示すことにより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ．

(1) $a_n = \dfrac{2n^2-3n+2}{3n^2+5n-3}$

(2) $a_n = \dfrac{2^n+3}{3^n+2}$

(3) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-3})$

(4) $a_n = \dfrac{a^n}{a^{2n}+1}$ （$a > 0$）

(5) $a_n = n\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^m - 1\right\}$ （m は自然数）

$\boxed{\mathbf{4}}$ $0 < a < b < c$ に対して，次が成り立つことを示せ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = b$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} = c$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ とする．次式を参考にして数列 $\{a_n\}$ が ∞ に発散することを示せ．

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
a_4 &\geqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2} \\
a_8 &\geqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{3}{2} \\
&\cdots
\end{aligned}
$$