演習問題 No. 12 の解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $z_x = 5x^4 + 3x^2y^3 + y^4$, $z_y = 3x^3y^2 + 4xy^3$ (2) $z_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2y}}$, $z_y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2y}}$

(3) $z_x = e^{x-y}(y\cos(xy) + \sin(xy))$, $z_y = e^{x-y}(x\cos(xy) - \sin(xy))$

(4) $z_x = \dfrac{2xy}{1+x^4y^2}$, $z_y = \dfrac{x^2}{1+x^4y^2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いると，$(x, y) \to (0, 0)$ と $r \to +0$ は同値であるから，

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = |r\cos^3\theta| \leqq r \longrightarrow 0 \qquad (\ r \to +0\ )$$

より，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$

(2) 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いると，$(x, y) \to (0, 0)$ と $r \to +0$ は同値であるから，

$$\frac{xy}{x^2+xy+y^2} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta\cos\theta} \longrightarrow \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta\cos\theta} \qquad (\ r \to +0\ )$$

となり，θ によって極限値は変わる．よって，極限値は $(0, 0)$ への近づきかたによって変わるから，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+xy+y^2}$ は存在しない．

(3) 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いると，$(x, y) \to (0, 0)$ と $r \to +0$ は同値であるから，

$$|x\log(x^2+y^2)| = |r\cos\theta\log(r^2)| \leqq 2r|\log r| \to 0 \qquad (\ r \to +0\ )$$

より，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\log(x^2+y^2) = 0$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いると，$(x, y) \to (0, 0)$ は $r \to +0$ と同値である．

(1)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-1}{x^2+y^2} = \lim_{r\to+0} \frac{-1}{r^2} = -\infty$$

であるから，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{r\to+0} e^{-\frac{1}{r^2}} = 0$$

(2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-1}{x^2+y^2} = \lim_{r\to+0}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{r^2}\right) = -\infty$$

であるから，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+y^2}\right) = \lim_{r\to+0} \tan^{-1}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{r^2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to+0} \frac{1-\cos r}{r^2} \\
&= \lim_{r\to+0} \frac{1-\cos r}{r^2}\frac{1+\cos r}{1+\cos r} = \lim_{r\to+0} \frac{1-\cos^2 r}{r^2(1+\cos r)} \\
&= \lim_{r\to+0} \left(\frac{\sin r}{r}\right)^2 \frac{1}{1+\cos r} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $z_x = 4x^3 - 12x^2y,\ z_y = -4x^3 + 4y^3$

(2) $z_x = \dfrac{2x+y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}},\ z_y = \dfrac{x+2y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}$

(3) $z = \log x / \log y$ より， $z_x = \dfrac{1}{x\log y},\ z_y = -\dfrac{\log x}{y(\log y)^2}$

(4) $z_x = \dfrac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = -\dfrac{y}{x^2+y^2},\ z_y = \dfrac{1/x}{1+(y/x)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1)

$$\begin{aligned}
f_x(0,0) &= \lim_{h\to0} \frac{(h+0)\sqrt{h^2+0}-0}{h} = \lim_{h\to0}\frac{h|h|}{h} = \lim_{h\to0}|h| = 0 \\
f_y(0,0) &= \lim_{k\to0} \frac{(0+k)\sqrt{0+k^2}-0}{k} = \lim_{k\to0}\frac{k|k|}{k} = \lim_{k\to0}|k| = 0
\end{aligned}$$

(2) $(x,y) \neq (0,0)$ においては

$$f_x = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad f_y = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

であるから，この式に $(x,y) = (a,b)$ を代入して

$$f_x(a,b) = \sqrt{a^2+b^2} + \frac{a(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \qquad f_y(a,b) = \sqrt{a^2+b^2} + \frac{b(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となる．