演習問題 No. 11 の解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a_n = \dfrac{n+1}{n!}$ とすると

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{\dfrac{n+1}{n!}}{\dfrac{n+2}{(n+1)!}}\right| = \frac{(n+1)^2}{n+2} \longrightarrow +\infty \quad (\ n \to \infty\ )$$

より収束半径は $+\infty$ であるから，収束域は $\mathbb{R}$ である．

(2) $a_n = \dfrac{3^n}{n^2}$ とすると

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{\dfrac{3^n}{n^2}}{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}\right| = \frac{1}{3}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^2 \longrightarrow 3 \quad (\ n \to \infty\ )$$

より収束半径は $\dfrac{1}{3}$ である．$x = \dfrac{1}{3}$ のとき，級数は $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ となるから，例題4.2より収束する．$x = -\dfrac{1}{3}$ のとき，級数は $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ となる．$\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$ であるから，定理 4.2 より級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ も収束する．よって，収束域は $\Big[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\Big]$ である．

(3) $a_n = \Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)^n$ とすると

$$\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \Big(\frac{n}{n+1}\Big) \longrightarrow 1 \quad (\ n \to \infty\ )$$

より収束半径は 1 である．$x = 1$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)^n = \dfrac{1}{e} \neq 0$ であるから定理 4.1 より級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)^n$ は発散する．$x = -1$ のとき，極限 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)^n$ は存在しないから，定理 4.1 より級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)^n$ は発散する．よって，収束域は $(\,-1, 1\,)$ である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $\dfrac{1}{1-t}$ のマクローリン展開は以下の通りである．

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \qquad (\ |t| < 1\ )$$

(1) $t = x^4$ として，$\dfrac{1}{1-x^4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{4n}$

(2) 項別微分定理により，

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

(3) 項別積分定理により，

$$-\log(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n$$

$$\log(3-x) = \log 3 + \log\bigl(1-\frac{x}{3}\bigr) = \log 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}x^n$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) e^x と e^{-x} のマクローリン展開の式より，

$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

(2) 関数 $\log(1+t)$ のマクローリン展開の式

$$\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n$$

で $t = x^3$ とすると，

$$\log(1+x^3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{3n}$$

$$x\log(1+x^3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{3n+1}$$

(3) 関数 e^t のマクローリン展開の式

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}t^n$$

で $t = -x^2$ とすると，

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$$

となる．この式を 0 から x まで積分すると，項別積分定理により，

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 例題 4.4 より $\tan^{-1} x$ のマクローリン展開は

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad (\ |x|<1\ )$$

である．$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を代入して，

$$\frac{\pi}{6} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{3^n\sqrt{3}}$$

より求める式を得る．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 関数 $\dfrac{1}{1-x}$ のマクローリン展開の式

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (\ |x| < 1\ )$$

を項別微分すると，

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\,, \qquad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \qquad (\ |x| < 1\ )$$

となるから，

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n\,, \qquad \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n \qquad (\ |x| < 1\ )$$

が成り立つ．

(1), (2) $x = \dfrac{1}{2}$ を代入して，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2\,, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} = 4$$

(3) (1), (2) の結果より，

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2} = 4 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\dfrac{x}{(1-ax)(1-bx)} = \dfrac{A}{1-ax} + \dfrac{B}{1-bx}$ を通分して

$$x = A(1-bx) + B(1-ax) = -(Ab+Ba)x + A + B$$

となるから，連立方程式 $Ab + Ba = -1,\ A + B = 0$ を解いて，$A = \dfrac{1}{a-b},\ B = -\dfrac{1}{a-b}$

(2) (1) より，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{1-ax} - \frac{1}{1-bx}\right) \\ &= \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ax)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(bx)^n\right) = \frac{1}{a-b}\sum_{n=1}^{\infty}(a^n - b^n)x^n \end{aligned}$$