演習問題 No. 10 の解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) ダランベールの判定法を用いる．

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2/5^{n+1}}{n^2/5^n}\right| = \frac{1}{5} < 1$$

より収束する．

(2) ダランベールの判定法を用いる．

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 > 1$$

より発散する．

(3) ダランベールの判定法を用いる．

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)!}{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)\cdot(2n+1)}}{\dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

より収束する．

(4) コーシーの判定法を用いる．

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1$$

より収束する．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 部分和を S_n とすると，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \longrightarrow \frac{1}{4}$$

より和は $1/4$ である．

(2) 等比級数の和の公式を用いて，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-3^n}{7^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n = \frac{\dfrac{1}{7}}{1-\dfrac{1}{7}} - \frac{\dfrac{3}{7}}{1-\dfrac{3}{7}} = -\frac{7}{12}$$

(3) 部分和を S_n とすると，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 2 - \frac{2}{n+1} \longrightarrow 2$$

より和は 2 である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^2} \neq 0$$

より級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^n}$ は発散する．

(2) 比較法を用いる．

$$\frac{n^2}{n^3+1} > \frac{n^2}{n^3+n^3} = \frac{1}{2}\frac{1}{n}$$

となるが，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散するから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ も発散する．

(3) 比較法を用いる．例題 2.4（34 ページ）の不等式より

$$0 < \tan^{-1}\left(\frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}$$

であり，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ も収束する．

(4) この級数は交代級数である．

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

より，交代級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ は収束する．

(5) 積分判定法を用いる．関数 xe^{-x^2} は $x \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で単調減少であり，

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^A xe^{-x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^A = \frac{1}{2e} < \infty$$

より広義積分は収束するから，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ も収束する．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 関数 $\dfrac{x}{x^3+1}$ は $x \geqq \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ で単調減少であるから，$n \leqq x \leqq n+1$ ならば，

$$\frac{n+1}{(n+1)^3+1} \leqq \int_n^{n+1}\frac{x}{x^3+1}\,dx \leqq \frac{n}{n^3+1}$$

が成り立つ．この式において $n=1$ から $N-1$ までの和をとると，

$$\sum_{n=1}^{N-1}\frac{n+1}{(n+1)^3+1} \leqq \sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}\frac{x}{x^3+1}\,dx = \int_1^N \frac{x}{x^3+1}\,dx \leqq \sum_{n=1}^{N-1}\frac{n}{n^3+1}$$

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{n^3+1} \leqq \int_1^N \frac{x}{x^3+1}\,dx \leqq \sum_{n=1}^{N-1}\frac{n}{n^3+1}$$

(2) (1) の不等式で $N \to \infty$ として，

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \leqq \int_1^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx &= \lim_{A\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx \\
&= \lim_{A\to\infty} \left[\frac{1}{6}\log(x^2-x+1) - \frac{1}{3}\log|x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^A \\
&= \lim_{A\to\infty} \left\{\frac{1}{6}\log\frac{A^2-A+1}{(A+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2A-1}{\sqrt{3}}\right)\right\} + \frac{1}{3}\log 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\log 2
\end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\log 2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \leqq \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\log 2 + \frac{1}{2}$$