演習問題 No. 9 の解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 曲線の共有点の x 座標は $x=0,\,3$ となる．面積を S とすると，

$$S=\int_0^3\left\{x^2-(x^3-2x^2)\right\}dx=\int_0^3(3x^2-x^3)\,dx=\Big[x^3-\frac{x^4}{4}\Big]_0^3=\frac{27}{4}$$

(2) 曲線の共有点の x 座標は $x=2,\,-2$ となる．面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^2\left\{\frac{4}{x^2+4}-\left(x^2-\frac{7}{2}\right)\right\}dx=2\int_0^2\left(\frac{4}{x^2+4}-x^2+\frac{7}{2}\right)dx\\&=2\Big[2\tan^{-1}\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{7}{2}x\Big]_0^2=2\left(2\frac{\pi}{4}-\frac{8}{3}+7\right)=\pi+\frac{26}{3}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\pi/2}|\cos x-\sin x|\,dx=\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin x-\cos x)\,dx\\&=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\pi/4}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}\\&=2\sqrt{2}-2\end{aligned}$$

(2) 曲線の交点の座標は $(-1,-2)$, $(5,4)$ となる．面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^4\left\{(y+1)-\left(\frac{1}{2}y^2-3\right)\right\}dy=\int_{-2}^4\left(-\frac{1}{2}y^2+y+4\right)dy\\&=\Big[-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}y^2+4y\Big]_{-2}^4\\&=18\end{aligned}$$

(3) 曲線の交点の座標は $(0,0)$, $(-3,3)$ となる．面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^3\left\{(2y-y^2)-(y^2-4y)\right\}dy=\int_0^3(6y-2y^2)\,dy\\&=\Big[3y^2-\frac{2}{3}y^3\Big]_0^3\\&=9\end{aligned}$$

(4) x の範囲は $a^2-x^2=(y-x)^2\geqq 0$ から，$-a\leqq x\leqq a$ である．$y=x\pm\sqrt{a^2-x^2}$ より，面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_{-a}^a\left\{(x+\sqrt{a^2-x^2})-(x-\sqrt{a^2-x^2})\right\}dx=2\int_{-a}^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=4\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx\\&=2\Big[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\Big]_0^a=\pi a^2\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 長さを L とすると，

$$L = \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^b \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\,dx$$
$$= \int_0^b \cosh\left(\frac{x}{a}\right)dx = \left[a\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^b = a\sinh\left(\frac{b}{a}\right)$$

(2) 長さを L とすると，

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(at\cos t)^2 + (at\sin t)^2}\,dt$$
$$= a\int_0^{2\pi} t\,dt = \left[\frac{at^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 a$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 体積を V とすると，

$$V = \pi\int_0^1 \left\{x^2 - (x^2)^2\right\}dx = \pi\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \pi\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

(2) 体積を V とすると，

$$V = \pi\int_0^1 \left\{(\sqrt{x})^2 - x^2\right\}dx = \pi\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

(3) 体積を V とすると，

$$V = \pi\int_0^1 \left\{(x+1)^2 - (x^2+1)^2\right\}dx = \pi\int_0^1 (-x^4 - x^2 + 2x)\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{7}{15}\pi$$

(4) $y = e^{x^2}$ と $y = ex^2$ の共有点は $(\pm 1, e)$ であり,「$y = e^{x^2} \iff x^2 = \log y$」,「$y = ex^2 \iff x^2 = \dfrac{y}{e}$」より，体積を V とすると，

$$V = \pi\int_0^e \frac{y}{e}\,dy - \pi\int_1^e \log y\,dy = \pi\left[\frac{y^2}{2e}\right]_0^e - \pi\left\{\left[y\log y\right]_1^e - \int_1^e y\frac{1}{y}\,dy\right\}$$
$$= \frac{e\pi}{2} - e\pi + \pi(e-1) = \frac{(e-2)\pi}{2}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ シュワルツの不等式を $f(x) = 1, g(x) = \sqrt{1+\cos^2 x}$ に対して適用して,

$$L = \int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \leqq \left(\int_0^\pi 1^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\pi (1+\cos^2 x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\pi} = \frac{\sqrt{6}}{2}\pi$$

を得る.

注意. この問題の被積分関数の原始関数は初等関数でかけないことが知られているので, この長さ L の値を正確に求めるのは難しい.