演習問題 No. 8 の解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 部分積分により，

$$\int x^{p-1}\log x\,dx = \frac{x^p}{p}\log x - \int \frac{x^p}{p}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^p}{p}\log x - \frac{x^p}{p^2}$$

(2) $p>0$ より，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^p = 0$ であり，ロピタルの定理より，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^p\log x = 0$ が成り立つ．$x^{p-1}\log x$ は $x=0$ で不連続であるから，広義積分の定義により

$$\int_0^1 x^{p-1}\log x\,dx = \lim_{\alpha\to+0}\int_\alpha^1 x^{p-1}\log x\,dx = \lim_{\alpha\to+0}\left[-\frac{\alpha^p}{p}\log\alpha - \frac{1-\alpha^p}{p^2}\right] = -\frac{1}{p^2}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 原始関数は

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \tan^{-1} e^x$$

であるから，

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\tan^{-1}e^\beta - \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

(2) 原始関数は

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2}{x^4+4}\,dx &= \frac{1}{2}\log(x^2-2x+2) - \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) + \tan^{-1}(x-1) + \tan^{-1}(x+1)\\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}\right) + \tan^{-1}(x-1) + \tan^{-1}(x+1)\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+4}\,dx &= \lim_{\beta\to\infty}\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}\right) + \tan^{-1}(x-1) + \tan^{-1}(x+1)\right]_0^\beta\\ &= \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{2}\log\left(\frac{\beta^2-2\beta+2}{\beta^2+2\beta+2}\right) + \lim_{\beta\to\infty}\tan^{-1}(\beta-1) + \lim_{\beta\to\infty}\tan^{-1}(\beta+1)\\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi\end{aligned}$$

(3) 原始関数は

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx &= \lim_{\beta\to b-0}\sin^{-1}\left(\frac{2\beta-(a+b)}{b-a}\right) - \lim_{\alpha\to a+0}\sin^{-1}\left(\frac{2\alpha-(a+b)}{b-a}\right)\\ &= \sin^{-1}1 - \sin^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 原始関数は

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\Big)\cos x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\log\Big|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big| = \frac{1}{2}\log\Big|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\frac{1+\sin x}{1+\sin x}\Big| = \log\Big|\tan x+\frac{1}{\cos x}\Big|\end{aligned}$$

であるから，

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos x}\,dx = \lim_{\beta\to\pi/2-0}\int_0^{\beta}\frac{1}{\cos x}\,dx = \lim_{\beta\to\pi/2-0}\Big[\log\Big|\tan x+\frac{1}{\cos x}\Big|\Big]_0^{\beta} = \infty$$

となり発散する．

(2) 関数 $\dfrac{1}{x-1}$ は $x=1$ で不連続であるから，

$$\begin{aligned}&\int_0^3\frac{1}{x-1}\,dx = \int_0^1\frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^3\frac{1}{x-1}\,dx\\ &\int_0^1\frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{\beta\to1-0}\int_0^{\beta}\frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{\beta\to1-0}\Big[\log|x-1|\Big]_0^{\beta} = -\infty\\ &\int_1^3\frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{\alpha\to1+0}\int_{\alpha}^{3}\frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{\alpha\to1+0}\Big[\log|x-1|\Big]_{\alpha}^{3} = \infty\end{aligned}$$

より発散する．

(3) $x \geqq 1$ において，$0 < e^{-x^2} \leqq e^{-x}$ であり，広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$ は収束するから，$\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ も収束する．

(4) $n=1$ の場合は

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x+1}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}\frac{1}{x+1}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\Big[\log|x+1|\Big]_1^{\beta} = \infty$$

より発散する．$n \geqq 2$ の場合は，$x \geqq 1$ において，$0 < \dfrac{1}{x^n+1} \leqq \dfrac{1}{x^2+1}$ であり，広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx$ は収束するから，$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^n+1}\,dx$ も収束する．

(5) $x \geqq 0$ において，

$$0 \leqq \frac{x^2\tan^{-1}x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2}{x^2+1}\,\tan^{-1}x\,\frac{1}{x^2+1} \leqq \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2+1}$$

であり，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx$ は収束するから，$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2\tan^{-1}x}{(x^2+1)^2}\,dx$ も収束する．

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) 原始関数は

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x$$

であるから．

$$\int_0^1 \log x\,dx = \lim_{\alpha\to+0}\int_\alpha^1 \log x\,dx = \lim_{\alpha\to+0}\Big[x\log x - x\Big]_\alpha^1 = \lim_{\alpha\to+0}(-\alpha\log\alpha - 1 + \alpha) = -1$$

(2) 部分積分により

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 (\log x)^n\,dx = \lim_{\alpha\to+0}\int_\alpha^1 (\log x)^n\,dx \\
&= \lim_{\alpha\to+0}\left\{\Big[x(\log x)^n\Big]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 x\,n(\log x)^{n-1}\,\frac{1}{x}\,dx\right\} \\
&= \lim_{\alpha\to+0}\left\{-\alpha(\log\alpha)^n - n\int_\alpha^1 (\log x)^{n-1}\,dx\right\} \\
&= -n\lim_{\alpha\to+0}\int_\alpha^1 (\log x)^{n-1}\,dx = -n\int_0^1 (\log x)^{n-1}\,dx \\
&= -nI_{n-1}
\end{aligned}$$

(3) (2) より，

$$I_n = -nI_{n-1} = (-n)(-(n-1))I_{n-2} = \cdots = (-1)^{n-1}\,n!\,I_1 = (-1)^n\,n!$$