演習問題 No. 5 の解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) ロピタルの定理より，

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{2x\sin x-\pi}{\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\sin x+2x\cos x}{-\sin x}==-2$$

(2) ロピタルの定理を繰り返して用いることにより，

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\log(1+x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x\log(1+x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{\log(x+1)+\dfrac{x}{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{(1+x)^2}}{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{(1+x)^2}}=-\frac{1}{2}$$

(3) $y=(e^x+x)^{1/x}$ とおくと，ロピタルの定理より，

$$\lim_{x\to 0}\log y=\lim_{x\to 0}\frac{\log(e^x+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x}=2$$

となるから，$\displaystyle\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}=\lim_{x\to 0}e^{\log y}=e^2$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) ロピタルの定理より，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1/\cos^2 x)-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2$$

(2) ロピタルの定理を繰り返して用いることにより，

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x+1-x}{\cos\pi x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(1/x)-1}{-\pi\sin\pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{-1/x^2}{-\pi^2\cos\pi x}=-\frac{1}{\pi^2}$$

(3) 対数微分法より，$\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)'=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{-\dfrac{1}{x^2}\log(1+x)+\dfrac{1}{x(x+1)}\right\}$ であるから，ロピタルの定理より，

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{-\frac{1}{x^2}\log(1+x)+\frac{1}{x(x+1)}\right\}\right]=1-2\log 2$$

(4) ロピタルの定理を繰り返して用いることにより，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan^{-1}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{x}+\frac{2}{(1+x^2)^2}\right)=\frac{1}{6}$$

(5) $y=\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$ とおくと，ロピタルの定理より，

$$\lim_{x\to\infty}\log y=\lim_{x\to\infty}x\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+a)-\log(x-a)}{1/x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x-a}}{-1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{1-(a/x)^2}=2a$$

となるから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{\log y}=e^{2a}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)$ が $x = \dfrac{\pi}{3}$ で極大値または極小値をとるならば，$f'(\dfrac{\pi}{3}) = 0$ でなければならない．

$$f'(x) = a\cos x + 2\cos 2x\,, \qquad f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}a + 2(-\frac{1}{2}) = 0$$

より，$a = 2$ となる．

(2) $a = 2$ を代入して，

$$f''(x) = -2\sin x - 4\sin 2x\,, \qquad f''(\frac{\pi}{3}) = -3\sqrt{3} < 0$$

であるから，定理 2.14 により $f(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ は極大値となる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(\dfrac{\pi}{4}) = a - \dfrac{1}{\sqrt{2}}b = 5$ と

$$f''(x) = -4a\sin 2x - 9b\cos 3x\,, \qquad f''(\frac{\pi}{4}) = -4a + \frac{9}{\sqrt{2}}b = 0$$

より，$a = 9,\, b = 4\sqrt{2}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 内接円の半径を r とすると，$\triangle$ABC の周の長さは $2(a + x)$ であるから，$\triangle$ABC の面積 S は

$$S = r(a + x)$$

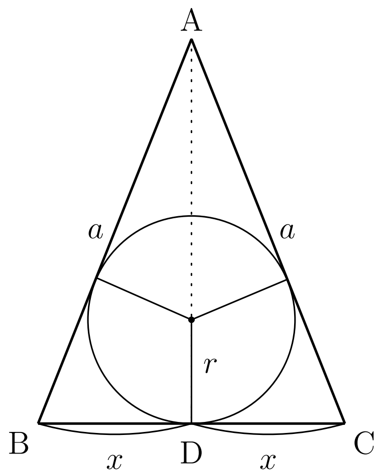
と表される．一方，S は x を用いて，

$$S = x\sqrt{a^2 - x^2}$$

と表されるから，

$$r = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a + x}$$

$$I = \pi r^2 = \frac{\pi x^2(a^2 - x^2)}{(a + x)^2} = \frac{\pi x^2(a - x)}{a + x}$$



(2) I を x で微分すると，

$$\frac{dI}{dx} = \frac{\pi(2ax - 3x^2)}{a + x} - \frac{\pi x^2(a - x)}{(a + x)^2} = \frac{2\pi x(a^2 - ax - x^2)}{(a + x)^2}$$

$0 < x < a$ であるから，$I'(x) = 0$ となるのは $x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}a$ のときのみである．

増減表

x	0		$(\sqrt{5} - 1)a/2$		a
I'		$+$	0	$-$	
I		$\nearrow$	$(5\sqrt{5} - 11)\pi a^2/2$	$\searrow$	

により，$x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}a$ のとき，すなわち，$\mathrm{BC} = (\sqrt{5} - 1)a$ のとき内接円の面積は最大となる．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $f(x) = a\sin^{-1} x - \cos^{-1}(1-2x^2)$ とおく．$[\,0,\,1\,]$ において，$f(x) = b$（定数）が成り立つためには，

$$f'(x) = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} - (-1)\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}}(-4x) = \frac{a-2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (\,0 < x < 1\,)$$

とならなければならないから，$a = 2$，$b = f(0) = 0$ である．