演習問題 No. 4 の解答

1 (1) $f'(x) = \cos x + 3\sin 3x$, $f''(x) = -\sin x + 9\cos 3x$, $f'''(x) = -\cos x - 27\sin 3x$ であるから，$n = 2$ に対するマクローリンの定理は

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3 \\ &= -1 + x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\bigl\{\cos(\theta x) + 27\sin 3(\theta x)\bigr\} \qquad (\ 0 < \theta < 1\ ) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果より，

$$\frac{\sin x - \cos 3x + 1 - x}{x^2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{6}x\bigl\{\cos(\theta x) + 27\sin(3\theta x)\bigr\}$$

となる $0 < \theta < 1$ より，$x \to 0$ のとき $\theta x \to 0$ である．よって，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \cos 3x + 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\Bigl(\frac{9}{2} - \frac{1}{6}x\bigl\{\cos(\theta x) + 27\sin(3\theta x)\bigr\}\Bigr) = \frac{9}{2}$$

2 (1) $f'(c) = (c-a)^{m-1}(c-b)^{n-1}\{m(c-b) + n(c-a)\} = 0$ より，$c = \dfrac{na+mb}{m+n}$.

(2) $f'(c) = (2c - a - b)^3 = 0$ より，$c = \dfrac{a+b}{2}$.

3 (1) $f'(2\theta) = 3(2\theta)^2 + 1 = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 5$ より，$\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(2) $f'(\theta) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\theta^2}} = \dfrac{f(1) - f(0)}{1} = 1$ より，$\theta = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

4 $f(x) = \sqrt[5]{1+x}$ とすると，

$$f'(x) = \frac{1}{5}(1+x)^{-4/5}, \qquad f''(x) = -\frac{4}{25}(1+x)^{-9/5}, \qquad f'''(x) = \frac{36}{125}(1+x)^{-14/5}$$

であるから，$n = 2$ に対するマクローリンの定理は

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3 \\ &= 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}x^3(1+\theta x)^{-14/5} \end{aligned}$$

となる．$0 < \theta < 1$ より，$x \to 0$ のとき $\theta x \to 0$ であるから，

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[5]{1+x} - 1} - \frac{5}{x} &= \frac{x - 5(\sqrt[5]{1+x} - 1)}{x(\sqrt[5]{1+x} - 1)} = \frac{x - x + \frac{2}{5}x^2 - \frac{6}{25}x^3(1+\theta x)^{-14/5}}{x\Bigl(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}x^3(1+\theta x)^{-14/5}\Bigr)} \\ &= \frac{\frac{2}{5} - \frac{6}{25}x(1+\theta x)^{-14/5}}{\frac{1}{5} - \frac{2}{25}x + \frac{6}{125}x^2(1+\theta x)^{-14/5}} \longrightarrow 2 \quad (\ x \to 0\ ) \end{aligned}$$

5 (1) $f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,\ f^{(4)}(x)=\sin x$ より，

$$\sin x=-(x-\pi)+\frac{1}{6}(x-\pi)^3-\frac{1}{24}\sin\bigl(\theta(x-\pi)\bigr)(x-\pi)^4 \qquad (\ 0<\theta<1\ )$$

(2) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ f''(x)=(-x)(1+x^2)^{-3/2},\ f'''(x)=(2x^2-1)(1+x^2)^{-5/2},\ f^{(4)}(x)=(9x-6x^3)(1+x^2)^{-7/2}$ より，

$$\log(x+\sqrt{1+x^2})=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{9(\theta x)-6(\theta x)^3}{(1+\theta^2x^2)^{7/2}}\right)x^4 \qquad (\ 0<\theta<1\ )$$