# 演習問題 No. 3 の解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)
$$\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$

(2)
$$\begin{aligned}\left\{(x-3)\sqrt{x^2+2x+3}\right\}' &= \sqrt{x^2+2x+3} + (x-3)\frac{1}{2}(x^2+2x+3)^{-1/2}(2x+2)\\ &= \frac{x^2+2x+3+(x-3)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}}\end{aligned}$$

(3)
$$\left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)' = \frac{1}{1+(\sqrt{x^2-a^2}/a)^2} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+7h)-f(a-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[7\left(\frac{f(a+7h)-f(a)}{7h}\right) + \left(\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right)\right] = 8f'(a)$$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}} &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}\,\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}}\right]\\ &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2})\right] = 3\sqrt[3]{a^2}f'(a)\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)
$$\left(\tan^{-1}(\tanh x)\right)' = \frac{1}{1+\tanh^2 x}\operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x + \sinh^2 x} = \frac{1}{\cosh 2x}$$

(2) $\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2}{1+x} - 1$ であるから，
$$\left(\sin^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}}\frac{-2}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$$

(3) 対数微分法を用いる．$y = x^{e^x}$ の両辺の対数をとると，$\log y = e^x \log x$ となる．この式の両辺を微分すると，
$$\frac{y'}{y} = e^x\log x + e^x\frac{1}{x} = e^x(\log x + \frac{1}{x})$$
$$y' = ye^x(\log x + \frac{1}{x}) = x^{e^x}e^x(\log x + \frac{1}{x})$$

(4) 対数微分法を用いる．$y = (\cosh x)^x$ の両辺の対数をとると，$\log y = x\log(\cosh x)$ となる．この式の両辺を微分すると，
$$\frac{y'}{y} = \log(\cosh x) + x\frac{\sinh x}{\cosh x} = \log(\cosh x) + x\tanh x$$
$$y' = y(\log(\cosh x) + x\tanh x) = (\cosh x)^x(\log(\cosh x) + x\tanh x)$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 定義より

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h|h|-0}{h}=|h|\longrightarrow 0 \quad (\ h\to 0\ )$$

となるから，$f'(0)=0$ である．

(2) 定義より

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h\tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{h^2}\right)-0}{h}=\tan^{-1}\left(-\frac{1}{h^2}\right)\longrightarrow -\frac{\pi}{2} \quad (\ h\to 0\ )$$

となるから，$f'(0)=-\dfrac{\pi}{2}$ である．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$ であるから，

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)'=1-\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \qquad (\ n\geqq 2\ )$$

(2) $a^x=e^{x\log a}$ より，$(a^x)'=a^x\log a,\ \cdots,\ (a^x)^{(n)}=a^x(\log a)^n$

(3) 3 倍角の公式より，

$$\cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$$

であるから，

$$(\cos^3 x)^{(n)}=\frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{3^n}{4}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

(4) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2})$ であり，$x$ の 2 次以上の導関数は 0 であるから，ライプニッツの公式を用いて，

$$\begin{aligned}(x\sin x)^{(n)}&=x\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+{}_n\mathrm{C}_1\times 1\times\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\\&=x\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\end{aligned}$$