演習問題 No. 2 の解答

$\boxed{\textbf{1}}$ (1) $x \neq 2$ では $f(x)$ は明らかに連続である．$x = 2$ で連続になるためには $\displaystyle\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} f(x)$ が成り立たねばならない．

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = 4a^2 = \lim_{x\to 2+0} f(x) = 2(a+1)$$

$2a^2 - a - 1 = (2a+1)(a-1) = 0$ より，$a = -\dfrac{1}{2}, 1$ である．

(2) $x \neq 0$ では $f(x)$ は明らかに連続である．$x = 0$ で連続になるためには $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 3a+4$ が成り立たねばならない．$a = 0$ の場合は，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq 4$ となるから，$a \neq 0$ である．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2ax - 2\sin ax}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin ax(\cos ax - 1)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin ax(\cos ax - 1)}{x^3}\frac{\cos ax + 1}{\cos ax + 1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin ax(\cos^2 ax - 1)}{x^3(\cos ax + 1)} = -2a^3\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^3\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos ax}\\ &= -a^3 = 3a+4\end{aligned}$$

方程式 $a^3 + 3a + 4 = (a+1)(a^2 - a + 4) = 0$ の実数解は -1 のみであるから，$a = -1$ である．

$\boxed{\textbf{2}}$ (1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x} - 1 - 2x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x} - 1 - 2x}{x^2}\frac{\sqrt{1+4x} + (1+2x)}{\sqrt{1+4x} + (1+2x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+4x) - (1+2x)^2}{x^2(\sqrt{1+4x} + (1+2x))} = \lim_{x\to 0}\frac{-4x^2}{x^2(\sqrt{1+4x} + (1+2x))}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-4}{\sqrt{1+4x} + 1 + 2x} = -2\end{aligned}$$

(2) $y = 2x + 3x^2$ とおくと，$x \to 0$ のとき $y \to 0$ であるから，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x+3x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x+3x^2)}{2x+3x^2}\frac{2x+3x^2}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}\lim_{x\to 0}(2+3x) = 2$$

(3) $y = \sqrt[3]{1+12x}$ とおくと $x = \dfrac{y^3-1}{12}$ であり，$x \to 0$ のとき $y \to 1$ であるから，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+12x}}{x} = \lim_{y\to 1}\frac{y-1}{(y^3-1)/12} = \lim_{y\to 1}\frac{12}{y^2+y+1} = 4$$

(4) $y = \sqrt[6]{x}$ とおくと $\sqrt{x} = y^3$, $\sqrt[3]{x} = y^2$ であり，$x \to 1$ のとき $y \to 1$ であるから，

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{y\to 1}\frac{y^2-1}{y^3-1} = \lim_{y\to 1}\frac{y+1}{y^2+y+1} = \frac{2}{3}$$

(5) $x = y + \dfrac{\pi}{4}$ とおくと，$x \to \dfrac{\pi}{4}$ のとき $y \to 0$ であるから，

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\tan x - 1}{x - \pi/4} = \lim_{y\to 0}\frac{\tan\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right) - 1}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{\tan y + 1}{1 - \tan y} - 1}{y} = 2\lim_{y\to 0}\left(\frac{\tan y}{y}\right)\frac{1}{1-\tan y} = 2$$

(6) $\dfrac{\pi}{x} = y + \dfrac{\pi}{2}$ とおくと，$x - 2 = -\dfrac{2y}{y+\pi/2}$ であり，$x \to 2$ のとき $y \to 0$ であるから，

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cos(\pi/x)}{x-2} = \lim_{y\to 0}\frac{\cos(y+\pi/2)}{-\dfrac{2y}{y+\pi/2}} = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$ (2) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)=\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$ (3) $\sec\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{2}\right)=\sec\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(4) $\theta=\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ とすると，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ が成り立つ．$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ となるから，

$$\tan\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)=\tan\theta=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(5) $\alpha=\tan^{-1}3$, $\beta=\tan^{-1}7$ とすると，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\tan\alpha=3$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, $\tan\beta=7$ が成り立つ．

$$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}, \qquad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}, \qquad \sin\beta=\frac{7}{5\sqrt{2}}, \qquad \cos\beta=\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

となるから，加法定理により，

$$\sin(\tan^{-1}3+\tan^{-1}7)=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3\cdot1+7\cdot1}{\sqrt{10}\cdot5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\theta=\cos^{-1}x=\tan^{-1}3$ とおく．θ は $\cos^{-1}$ の値にも $\tan^{-1}$ の値にもなるから，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である．よって，$x=\cos\theta>0$, $\tan\theta=3$ より，

$$x=\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

(2) $\alpha=\tan^{-1}x$, $\beta=\tan^{-1}\dfrac{3}{7}$ とおくと，加法定理により，

$$x=\tan\alpha=\tan2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{2\cdot\frac{3}{7}}{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{21}{20}$$

(3) $\cos^{-1}$ の値域は $[\,0,\,\pi\,]$ であるから，

$$\frac{\pi}{3}\leqq\cos^{-1}(1-x)\leqq\pi$$

である．$[\,0,\,\pi\,]$ において $\cos$ は単調減少関数であるから．

$$-1\leqq1-x\leqq\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

より，$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq2$ となる．