演習問題 No. 1 の解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 数学的帰納法を用いる．

$a_1 = 1$ より，$n = 1$ の場合は明らかに成り立つ．

$1 \leqq a_n \leqq 3$ が成り立つと仮定すると，$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} \geqq 2 > 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} \leqq 3$ となり $n+1$ の場合も成り立つ．よって，$1 \leqq a_n \leqq 3$ が示せた．

(2) (1) より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{2a_n + 3} - a_n = (\sqrt{2a_n+3} - a_n) \times \frac{\sqrt{2a_n+3} + a_n}{\sqrt{2a_n+3} + a_n} = \frac{2a_n + 3 - a_n^2}{\sqrt{2a_n+3} + a_n} \\ &= \frac{(a_n+1)(3-a_n)}{\sqrt{2a_n+3} + a_n} \geqq 0 \end{aligned}$$

となり，$\{a_n\}$ が単調増加列であることが示せた．

(3) (1) と (2) より $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加列であるから定理 1.3 より収束する．極限を α とする．

$a_{n+1}^2 = 2a_n + 3$ において $n \to \infty$ とすると，$\alpha^2 = 2\alpha + 3$ を得る．$1 \leqq a_n \leqq \alpha$ より，$\alpha = 3$ となる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \dfrac{2}{n+1} \leqq 1$ より，$\{a_n\}$ が単調減少列であることが示せた．

(2) 明らかに $a_n > 0$ であるから，$\{a_n\}$ は下に有界な単調減少列であるから定理 1.3 より収束する．極限を α とする．

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2a_{n-1}}{n} = 2\Big(\lim_{n\to\infty} a_{n-1}\Big)\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big) = 2\alpha \cdot 0 = 0$$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) $a_n = \dfrac{2 - (3/n) + (2/n^2)}{3 + 5/n - (3/n^2)} \longrightarrow \dfrac{2}{3}$

(2) $a_n = \dfrac{(2/3)^n + (1/3)^{n-1}}{1 + (1/3)^n} \longrightarrow 0$

(3) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-3})\dfrac{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n-3}}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n-3}} = \dfrac{6}{\sqrt{2 + (3/n)} + \sqrt{2 - (3/n)}} \longrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

(4) $a_n = \dfrac{1}{a^n + a^{-n}}$ と表せる．$a \neq 1$ のとき $a > 1$ か $\dfrac{1}{a} > 1$ のいずれかが成り立つから $a_n \longrightarrow 0$,
$a = 1$ のとき $a_n = \dfrac{1}{2} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$

(5) 2 項定理より，$a_n = n\Big\{\displaystyle\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k \frac{1}{n^k} - 1\Big\} = {}_m\mathrm{C}_1 + \sum_{k=2}^{m} {}_m\mathrm{C}_k \frac{1}{n^{k-1}} \longrightarrow m$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $b^n < a^n + b^n < 2b^n$ より，

$$b < \sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[n]{2}b$$

が成り立つ．定理 1.2(2)(はさみうちの原理) と例題 1.3 より，

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$$

が成り立つ．

(2) $c^n < a^n + b^n + c^n < 3c^n$ より，

$$c < \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} < \sqrt[n]{3}c$$

が成り立つ．定理 1.2(2)(はさみうちの原理) と例題 1.3 より，

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = c$$

が成り立つ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数学的帰納法により，$a_{2^k} \geqq 1 + k/2$ を示す．$k = 1$ の場合は明らかに成り立つ．k のとき成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned} a_{2^{k+1}} = a_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} &\geqq a_{2^k} + \overbrace{\frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}}^{2^k\text{個}} \\ &\geqq 1 + \frac{k}{2} + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = 1 + \frac{k+1}{2} \end{aligned}$$

となり，$k + 1$ のときも成り立つ．

$\{a_n\}$ は単調増加数列であるから，これより，$a_n \longrightarrow \infty$ ($n \to \infty$) が示せた．