微分積分 I c クラス

倉田　和浩

2011 年 4 月 13 日

目次

微分積分学の誕生と解析学の基礎

約 350 年の歴史をもつ微分積分学を一気に学ぶことになる！
- ニュートン (1642-1727)・・・1666 年ごろに微分積分学の確立.
- ライプニッツ (1646-1716)・・・1672〜76 年に微分積分額の発見. dx や $\int$ などの記号の考案.

オイラー (1707-1783), ガウス (1777-1855)
- コーシー (1789-1857)・・・1823 年に厳密な解析学の基礎.
- アーベル (1802-1829)

フーリエ
- リーマン（1826-1866)

微分積分は，極限に関する学問である

数列の極限について見直そう．
何らかの規則で定められた実数の列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

を，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とか，単に $\{a_n\}$ と書く．

例．$a_1 = 1, a_{n+1} = \cos a_n \ (n \geqq 1)$ で定義される数列

$$a_2 = \cos 1, a_3 = \cos(\cos 1), a_4 = \cos(\cos(\cos 1)), \cdots$$

は，そもそも収束するのだろうか？収束するとわかったとしても，その極限値ってどんな値なのだろうか？

数列の収束

- 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に収束するとは, n が限りなく大きくなるとき, a_n が限りなく α に近づくとき,

$$a_n \to \alpha \ (n \to +\infty)$$

あるいは, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ と書いて, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束するという. また, α を極限値という. これは,

$$|a_n - \alpha| \to 0 \ (n \to +\infty)$$

と同じことを意味する.
例. $a_n = \frac{1}{n}$ は $|a_n - 0| = \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to +\infty)$ より, 0 に収束する. $b_n = \frac{2n+1}{n+1}$ は
$|b_n - 2| = |\frac{2n+1}{n+1} - 2| = \frac{1}{n+1} \to 0 \ (n \to +\infty)$ より
$\lim_{n\to+\infty} b_n = 2$.

「n を限りなく大きくとる」とか、「限りなく α に近づく」といったあいまいな表現をなくして、次のように定義すると, 数列の収束が直感的にわかりずらい場合や理論展開に都合がよいことが分かっている.

♣　$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ の厳密な定義：
任意の $\epsilon > 0$ に対して, 次を満たす (十分大きな) $N = N(\epsilon) > 0$ が存在すること:
$n \geqq N$ ならば, $|a_n - \alpha| < \epsilon$ が成立.

(注釈) 一般に, 指定する誤差 $\epsilon > 0$ を小さくとればとるほど, $N(\epsilon)$ は大きく取る必要がある.

ただし, この授業では, 厳密な理論展開は犠牲にして運用面に重点を置くので, 直感的理解をできるだけ活用して, この定義を積極的に使っての説明はしない.

● 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が（どの値にも）収束しないとき，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するという．
例．収束しない数列の例．
$a_n = (-1)^n$, $b_n = 1 - \frac{1}{n+1} + n^2$ などは収束しない．

定理 (いくつかの基本的な性質)

(1) $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$ ならば，
$\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$.
(2) $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$ で，$\beta \neq 0$ ならば，
$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$.
(3) $a_n \leqq b_n$ $(n \geqq 1)$ で，$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$,
$\lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$ ならば，$\alpha \leqq \beta$ がなりたつ．
(4)(はさみうちの原理） $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ $(n \geqq 1)$ であって，
$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ かつ $\lim_{n\to+\infty} b_n = \alpha$ ならば，
$\lim_{n\to+\infty} c_n = \alpha$ がなりたつ．

いくつかの例

例 1.

$$a_n = \frac{n \sin n}{1+n^2}$$

とするとき，　$|\sin n| \leqq 1$ より

$$|a_n| \leqq \frac{n}{1+n^2} \leqq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to +\infty)$$

一見複雑な数列を単純な数列ではさみこんで，極限値を見極めるのが，はさみうちの原理の醍醐味である．

例 2. $b_n = \frac{n^2}{n!}$ と置く.

$$0 \leqq b_n = \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)\cdots 2} \leqq \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} \ (n \geqq 3)$$

$$\leqq \frac{n}{(n-1)(n-2)} = \frac{\frac{1}{n}}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})} \to 0 \ (n \to +\infty)$$

となるので, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$.

２つの便利な収束判定条件

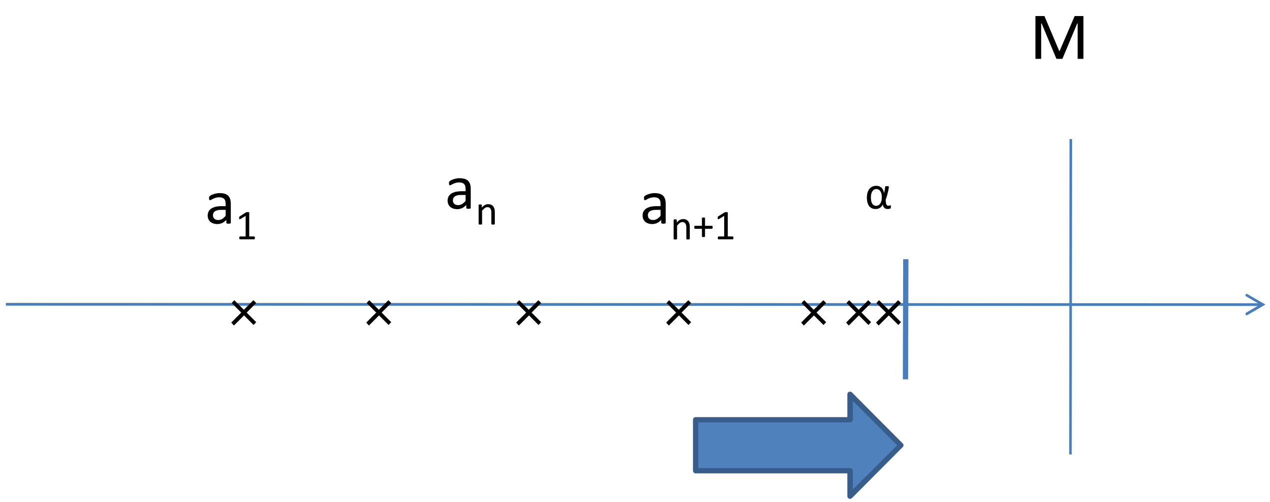
♣ 与えられた数列が収束するのか，発散するのかを判定するには？（数列 $\{a_n\}$ が収束するとき，$\{a_n\}$ は収束列であるともいう．収束列であることがわかったとしても，その極限値がどんな数であるかはすぐにはわからないこともある.)

定理 (上に有界で単調増加な数列は収束する)

数列 $\{a_n\}$ は以下の２つの条件を満たすとき, ある実数 α に収束する.

(1) (単調増加性） $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq a_{n+1}$ $(n \geqq 1)$ が成り立つ. *(単に,* $a_n \leqq a_{n+1}$ $(n \geqq 1)$ *と書いても同じ.)*

(2)(上に有界） ある一定値 M があって $a_n \leqq M$ $(n \geqq 1)$ が成り立つ. *(このとき,* $\{a_n\}$ *は上に有界な数列であるという.)*



単調増加で、
上に有界な数
列{ a_n}

ぎりぎりの数α
があるはず

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$$

同様に,

定理 (下に有界で単調減少な数列は収束する)

数列 $\{b_n\}$ は以下の２つの条件を満たすとき, ある実数 β に収束する.

(1) (単調増加性）$b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n \geqq b_{n+1}$ $(n \geqq 1)$ が成り立つ. *(単に,* $b_n \geqq b_{n+1}$ $(n \geqq 1)$ と書いても同じ.*)*

(2)(下に有界）ある一定値 L があって $L \leqq b_n$ $(n \geqq 1)$ が成り立つ. *(*このとき, $\{b_n\}$ は下に有界な数列であるという.*)*

もう 1 つの収束判定条件を説明するために，まず次の概念を紹介しよう．

♣ 数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であるとは，次がなりたつこと:

$$|a_n - a_m| \to 0 \ (n, m \to +\infty).$$

ちなみに，厳密な定義としては，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある実数 $N = N(\epsilon) > 0$ が存在して次が成り立つこと: $n, m \geqq N$ ならば，$|a_n - a_m| < \epsilon$.

定理 (コーシーの収束判定条件)

数列 $\{a_n\}$ がコーシー列ならば，ある実数 α が存在して，$a_n \to \alpha \ (n \to +\infty)$ が成り立つ．

♣ コーシーの収束判定条件は，一般の数列の収束判定において強力である.(例えば，教科書 p.8 の問 1.1.5 を参照してみてほしい.)

$\sqrt{A}$ を近似する数列

例題 **1.** $A, C > 0$ として, 次の漸化式によって数列 $\{a_n\}$ を定める:

$$a_1 = C, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{A}{a_n})\ (n \geqq 1)$$

このとき, 相加・相乗平均の不等式：
$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}\ (a, b \geqq 0)$ より

$$a_{n+1} \geqq \sqrt{a_n \cdot \frac{A}{a_n}} = \sqrt{A}\ (n \geqq 1)$$

となり, $a_n \geqq \sqrt{A}\ (n \geqq 2)$ を得る. よって $\{a_n\}$ は下に有界な数列となる.

一方, $n \geqq 2$ で

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}(a_n + \frac{A}{a_n}) = \frac{1}{2}(a_n - \frac{A}{a_n}) = \frac{1}{2}\frac{a_n^2 - A}{a_n} \geqq 0$$

となるので, 数列 $\{a_n\}_{n=2}^{+\infty}$ は単調減少な数列となる.
よって, $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ はある実数 α に収束することがわかる.
また $a_n \geqq \sqrt{A}$ $(n \geqq 2)$ より $\alpha \geqq \sqrt{A}$ となる. 漸化式より

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{A}{\alpha})$$

となる. よって $\alpha^2 = A$ となるが, $\alpha \geqq \sqrt{A}$ となることが既に分かっているので $\alpha = \sqrt{A}$ となる.
♣ この数列は実際に, $\sqrt{2}$ とか $\sqrt{3}$ などの近似計算に用いられる. 初項 $a_1 = C > 0$ はどんな実数 $C > 0$ でも構わないことに注意しよう!

ネイピアの数 e

例題 2. a_n を次で定義する.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ (n \geqq 1).$$

この数列は, 単調増加で, 上に有界であることを示すことができる (証明は, 教科書を参照のこと).
よってその極限値

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

が定義される. この数をネイピアの数といって微分積分に極めて重要な数である. e は無理数であって, $e = 2.718\cdots$ であることも知られている.

♣ よくある（？）誤り：
$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})=1$ なので

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=(\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n}))^{\lim_{n\to+\infty}n}=1^\infty=1$$

といった計算をしないように！一般に,

$$\lim_{n\to+\infty}a_n^{b_n}\neq(\lim_{n\to+\infty}a_n)^{(\lim_{n\to+\infty}b_n)}.$$

定理 (２項定理)

実数 a, b に対して, 次が成り立つ：

$$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^{n-k} b^k$$

ここで

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

ただし, $a^0 = 1, 0! = 1$ と約束.

♣ 2 項定理の 1 つの応用例.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

なぜなら, $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ とおくと,

$$n = (1 + h_n)^n > 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2.$$

よって $0 < h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$ となるから.

♣ 教科書 p.4 の例題 1.2 の証明の式変形おいて, 例えば以下の点に注意するとよい.

$$ {}_nC_2 \frac{1}{n^2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} \frac{1}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2!n \cdot n} = \frac{1}{2!} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}). $$

また,

$$ \begin{aligned} (\frac{1}{n})^n &= \frac{1}{n!} \frac{(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}{n^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}). \end{aligned} $$

さらに, $k \geqq 3$ のとき

$$ \frac{1}{k!} = \frac{1}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1} < \frac{1}{2^{k-1}}. $$

応用例. $b_n = (1 - \frac{1}{n})^{-n}$ と置くとき,

$$b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n}$$

となるが, $n \to +\infty$ で

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \to e \cdot 1 = e$$

となる. よって

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

を得る.

関数の極限

● x が限りなく a に近づくとき, 関数 $f(x)$ の値が限りなく（近づき方によらない）ある一定値 α に近づくとき, $x \to a$ で $f(x)$ の極限が存在すると言って,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

と書く. このとき $x = a$ では $f(x)$ は定義されていなくてもよいが, いかなる近づき方をしても一定値 α に近づくことを要求していることが重要.

♣ ちなみに, 厳密な定義は次の通り：任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して次が成り立つこと:

$0 < |x - a| < \delta$ ならば, $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ がなりたつ.

例

例. $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ は存在しない.
なぜなら, $x = x_n = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^{-1}$ (n は自然数）として $n \to +\infty$ とすれば, $x = x_n \to 0$ であって,

$$\sin(\frac{1}{x_n}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \to 1 \ (n \to +\infty)$$

である.
一方で, $x = y_n = (\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)^{-1}$ とすれば, やはり $y_n \to 0 \ (n \to +\infty)$ であるが,

$$\sin(\frac{1}{y_n}) = \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1 \to -1 \ (n \to +\infty)$$

となるので, x の 0 への近づき方で極限が異なってしまう. 従って, $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ は存在しない.

例.

次の関数 $f(x)$ を考えよう.

$$f(x) = x\sin(\frac{1}{x})\ (x \neq 0)$$

これは, $|\sin(\frac{1}{x})| \leqq 1$ に注意して

$$|f(x)| \leqq |x| \to 0\ (x \to 0)$$

を得る. よって $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
♣ ここで用いたのも, はさみうちの原理:

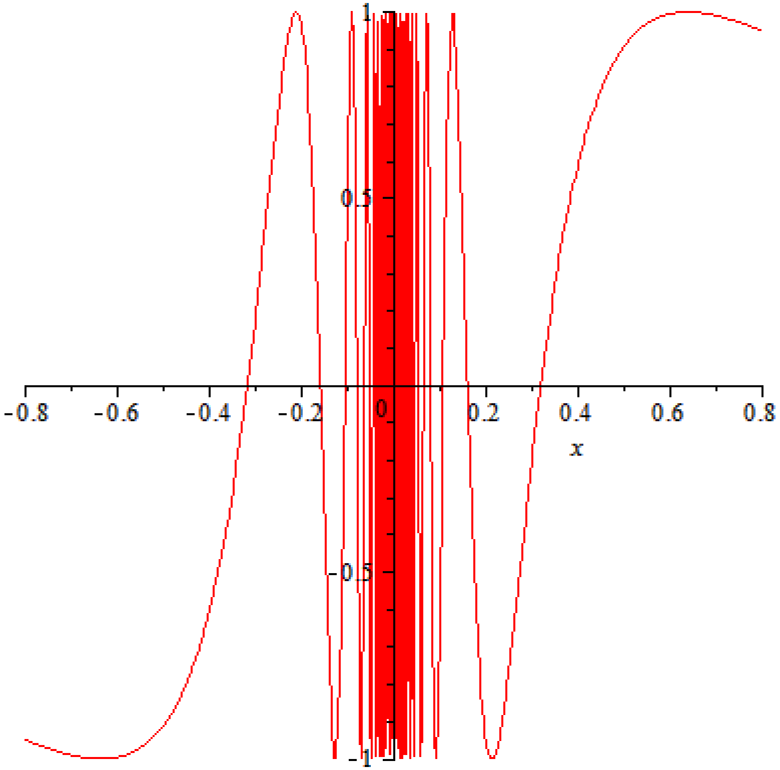
$$|f(x)| \leqq g(x)$$

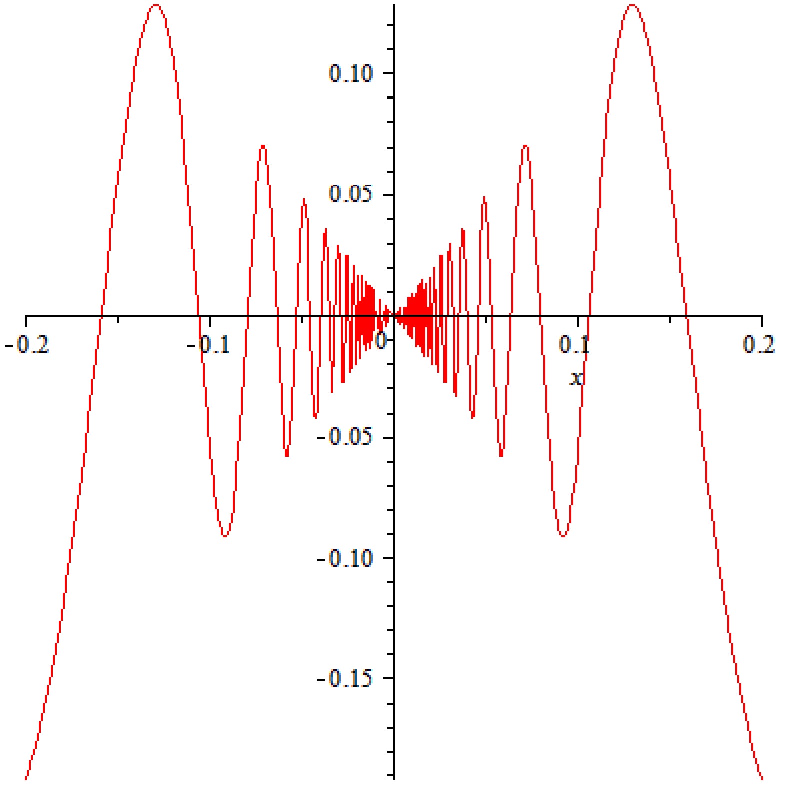
が成り立っていて, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ ならば,
$\lim_{x\to a} f(x) = 0$ が成り立つ.

X->0での極限の存在・非存在

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$





他の例.

次の関数 $g(x)$ を考える.

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}.$$

式変形を利用して

$$g(x) = \frac{1}{x}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{x}\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \to \frac{1}{2}\ (x \to 0).$$

よって $\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{2}$.