リアルオプションと投資戦略
章末解答の略解

芝田隆志[1]

問題 1.1. オプション価値を $C(t) = C(X(t), t)$ とする場合，伊藤の公式により，$C(t)$ は確率微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}C}{C} = \frac{C_t + C_x\mu x + \frac{1}{2}C_{xx}\sigma^2 x^2}{C} + \frac{C_x\sigma x}{C}\mathrm{d}z \tag{a1.1}$$

に従う．いま，原証券 $X(t)$ に w，デリバティブ $C(t)$ に $1-w$ の比率で投資するポートフォリオ $W(t)$ を考える．このポートフォリオの変動は，

$$\frac{\mathrm{d}W}{W} = w\frac{\mathrm{d}X}{X} + (1-w)\frac{\mathrm{d}C}{C} \tag{a1.2}$$

となる．このとき，比率 $w = -C/(C - C_x x)$ とすれば，ポートフォリオのボラティリティはゼロとなる (不確実性を除去する)．無裁定条件により，不確実性のない証券の収益率は安全資産の収益率 r に等しくなければならないので，

$$r\mathrm{d}t = \frac{-C_x x}{C - C_x x}\frac{\mathrm{d}X}{X} + \frac{C}{C - C_x x}\frac{\mathrm{d}C}{C} \tag{a1.3}$$

となる．(a1.3) 式に $\mathrm{d}X/X$ と $\mathrm{d}C/C$ を代入して整理すれば，ブラック・ショールズの偏微分方程式 (1.15) が得られる．

問題 1.2. X_t の解を代入して整理すれば，事業価値 $V(x)$ は，

$$V(x) = \mathbb{E}^x\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(r+\frac{\lambda^2}{2})t - \lambda z_t} X_t \mathrm{d}t\right] = x\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(r+\frac{\lambda^2}{2}-\nu)t}\mathbb{E}^x[\mathrm{e}^{(\sigma-\lambda)z_t}]\mathrm{d}t \tag{a1.4}$$

となる．ここで $\mathbb{E}^x[\mathrm{e}^{(\lambda-\sigma)z_t}] = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\lambda-\sigma)^2 t}$ となることに注意すれば，(1.20) が導出される．

問題 1.3. 1) X_t は

$$X_t = x\mathrm{e}^{\int_0^t(\mu_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2)\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma_u^2 \mathrm{d}z_u} \tag{a1.5}$$

となる．それゆえ，$V(x)$ は，

$$\begin{aligned} V(x) &= \mathbb{E}^x[x\int_0^T a_t \mathrm{e}^{-rt}\mathrm{e}^{\int_0^t(\mu_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2)\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma_u \mathrm{d}z_u}\mathrm{d}t] & \text{(a1.6)}\\ &= x\int_0^T a_t\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{e}^{\int_0^t \mu_u \mathrm{d}u}\mathrm{d}t & \text{(a1.7)}\end{aligned}$$

となる．

2)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V_t &= \frac{\partial V_t}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial V_t}{\partial X_t}\mathrm{d}X_t & \text{(a1.8)}\\ &= -a_t X_t \mathrm{d}t + \sigma_t V_t \mathrm{d}z_t & \text{(a1.9)}\end{aligned}$$

[1]Email: `tshibata at tmu.ac.jp`

問題 1.4. 1) 木島 (1994, p.168) にて，次の命題を確認せよ．
命題 (ドリフト付きブラウン運動の初到達時刻のラプラス変換): 確率過程 (V_t) が

$$\mathrm{d}V_t = \xi \mathrm{d}t + \nu \mathrm{d}z_t, \quad \xi > 0,\ \nu > 0 \tag{a1.10}$$

に従い，T_z を $z > 0$ への初到達時刻とする場合，このとき

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-rT_z}] = \mathrm{e}^{-\frac{z}{\nu^2}(\sqrt{\xi^2+2\nu^2 r}-\xi)}, \quad r > 0 \tag{a1.11}$$

が成立する (証明は木島 (1991) を参照されたい)．

いま，確率過程 (X_t) が臨界値 x^* に到達するとき，すなわち，$X_t = x^*$ のとき，

$$(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma z_t = \log(\frac{x^*}{x}) \tag{a1.12}$$

となる．それゆえ，ドリフト $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$ で拡散係数 σ となる確率過程が，$\log(x^*/x)$ に到達すると考えればよい．したがって，上記の命題に ξ を $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$，$\nu$ を σ に置き換えれば，

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-r\tau^*}] = \mathrm{e}^{-\frac{\log(x^*/x)}{\sigma^2}(\sqrt{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)^2+2r\sigma^2)}-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)} \tag{a1.13}$$

となり，整理すれば，$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-r\tau^*}] = (x/x^*)^\beta$ となる．

2) $C(x)$ を x で微分し，かつ $x = x^*$ とすれば，

$$C'(x^*) = \beta x^{*-1}(x^* - I) = 1 \tag{a1.14}$$

となる．整理すれば，$x^* = \beta I/(\beta - 1)$ を得る．

問題 1.5. まず，(1.34) を示す．特性方程式の正の根 β は，(1.32) 式を満たす．いま，(1.32) 式の左辺に $r\beta$ を足して引くと，

$$(\frac{1}{2}\sigma^2\beta + r)(\beta - 1) = \beta(r - \mu) \tag{a1.15}$$

となる．それゆえ，(1.34) が示される．

次に，$\frac{r}{\mu} > \beta > 1$ を示す．特性方程式を変形すれば，

$$\frac{r}{\mu} - \beta = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2\beta(\beta-1)}{\mu} > 0 \tag{a1.16}$$

となり，$\frac{r}{\mu} > \beta$ が得られる．また，(2.5) 式より $Q(1) = \mu - r < 0$ なので $\beta > 1$ となる．

問題 1.6. β を

$$\beta = \frac{\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu + \left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)^2 + 2r\sigma^2\right)^{1/2}\right)}{\sigma^2} \tag{a1.17}$$

と書き直す．このとき，ロピタールの公式を用いれば，

$$\lim_{\sigma\to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu + \left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)^2 + 2r\sigma^2\right)^{1/2}\right)''}{(\sigma^2)''} = \frac{r}{\mu} \tag{a1.18}$$

が得られる．

問題 1.7. ここでは，$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} < 0$ を示せば十分である．β は (1.32) 式を満たす正の根なので，(1.32) 式を σ で微分すれば，

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} = 0 \tag{a1.19}$$

となる．ただし，

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \sigma(\beta - 1) > 0 \tag{a1.20}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \sigma^2(\beta - \frac{1}{2}) + \mu > 0 \tag{a1.21}$$

なので，(a1.19)-(a1.21) 式より $\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} < 0$ が成立しなければならない．

また，$\lim_{\sigma \downarrow 0} C(x) \downarrow C_N(x)$ から $C(x) > C_N(x)$ を得る．

問題 1.8.

- I:

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}I} = \left(\frac{\partial C}{\partial x^*}\frac{\partial x^*}{\partial I} + \frac{\partial C}{\partial I}\right) = \frac{\partial C}{\partial I} = -\left(\frac{x}{x^*}\right)^\beta < 0 \tag{a1.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}I} = \frac{\beta}{\beta - 1} > 0 \tag{a1.23}$$

- μ:

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\mu} = \left(\frac{\partial C}{\partial x^*}\frac{\partial x^*}{\partial \beta} + \frac{\partial C}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \beta}{\partial \mu} = \frac{\partial C}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \mu} = \left(C \log \frac{x}{x^*}\right)\frac{\partial \beta}{\partial \mu} > 0 \tag{a1.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\mu} = \frac{-I}{(\beta - 1)^2}\frac{\partial \beta}{\partial \mu} > 0 \tag{a1.25}$$

  ただし $\frac{\partial \beta}{\partial \mu} < 0$ を用いた．この証明は問 1.7 と同様の手法を行えばよい．

- r:

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}r} = \left(\frac{\partial C}{\partial x^*}\frac{\partial x^*}{\partial \beta} + \frac{\partial C}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \beta}{\partial r} = \frac{\partial C}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial r} = \left(C \log \frac{x}{x^*}\right)\frac{\partial \beta}{\partial r} > 0 \tag{a1.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\mu} = \frac{-I}{(\beta - 1)^2}\frac{\partial \beta}{\partial r} > 0 \tag{a1.27}$$

  ただし $\frac{\partial \beta}{\partial r} > 0$ を用いた．この証明は問 1.7 と同様の手法を行えばよい．

問題 2.1. バリューマッチング条件 (ii) とスムースペイスティング条件 (iii) は，

$$A_1 {x^*}^\beta = x^* - I, \tag{a2.1}$$

$$\beta A_1 {x^*}^{\beta - 1} = 1, \tag{a2.2}$$

となる．(a2.1)(a2.2) 式を A_1 と x^* について解けば，(2.8)(2.9) 式が得られる．

問題 2.2. 常微分方程式 (2.11) の一般解は，$C(x) = A_1 \mathrm{e}^{\alpha_1 x} + A_2 \mathrm{e}^{\alpha_2 x}$ $(\alpha_1 > 0 > \alpha_2)$ である．初期条件 $C(-\infty) = 0$ なので $A_2 = 0$ であり，A_1 を A，α_1 を α とすれば，(2.11) の一般解は $C(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x}$ となる．バリューマッチング条件 (ii) とスムースペイスティング条件 (iii) は，

$$A\mathrm{e}^{\alpha x^*} = x^* - I, \tag{a2.3}$$

$$\alpha A\mathrm{e}^{\alpha x^*} = 1, \tag{a2.4}$$

となる．(a2.3)(a2.4) 式を A と x^* について解けば，(2.16)(2.17) 式が得られる．

問題 2.3. 1) $C(y) = A\mathrm{e}^{\alpha y}$ を (2.11) に代入すると，

$$\big(\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 + \nu\alpha - r\big)A\mathrm{e}^{\alpha y^*} \tag{a2.5}$$

となる．$\nu = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ となり，(a2.5) は (2.5) と一致する．

2) バリューマッチング条件 (ii) とスムースペイスティング条件 (iii) は，

$$A\mathrm{e}^{\alpha y^*} = \mathrm{e}^{y^*} - I, \tag{a2.6}$$

$$\alpha A\mathrm{e}^{\alpha y^*} = \mathrm{e}^{y^*}, \tag{a2.7}$$

となる．(a2.6)(a2.7) 式を A と e^{y^*} について解けば，

$$A = \mathrm{e}^{-\alpha y^*}(\mathrm{e}^{\alpha y^*} - I), \tag{a2.8}$$

$$\mathrm{e}^{y^*} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}I, \tag{a2.9}$$

となる．

3) $x^* = \mathrm{e}^{y^*}$ と変換すれば明らか．

問題 2.4. $C(x) = x^\alpha f(y)$．$y = \frac{2m\eta}{\sigma^2 x}$ を微分すれば，

$$C'(x) = x^\alpha(\alpha x^{-1} f - x^{-2} f' \frac{2m\eta}{\sigma^2}) \tag{a2.10}$$

$$C''(x) = x^\alpha\left(\alpha(\alpha-1)x^{-2}f + (2-2\alpha)x^{-3}f'\frac{2m\eta}{\sigma^2} + x^{-4}f''(\frac{2m\eta}{\sigma})^2\right) \tag{a2.11}$$

となる．(a2.10)(a2.11) 式を (2.25) 式に代入すれば，

$$x^\alpha f\left(\frac{1}{2}\sigma^2\alpha(\alpha-1) - \alpha\eta - r\right) + x^{\alpha-1}\eta m\left(yf'' + (2 - 2\alpha + \frac{2\eta}{\sigma^2} - y)f' + \alpha f\right) = 0 \tag{a2.12}$$

となる．すなわち，題意が得られる．

問題 2.5. (2.38) 式に $C(x + \mathrm{d}X_t, i + \mathrm{d}I_t) = C(x,i) + \mathrm{d}C(X_t, I_t)$ を代入すれば，

$$C(x,i) = (1 - r\mathrm{d}t)\mathbb{E}_t[C(x,i) + \mathrm{d}C(X_t, I_t)] \tag{a2.13}$$

を得る．$\mathrm{d}C(X_t, I_t)$ を代入して整理すれば題意を得る．

問題 2.6.　伊藤の公式により，f は，

$$\mathrm{d}f(P_t)=f'\big((\mu_x-\mu_i)P_t\mathrm{d}t+\tilde{\sigma}P_t\mathrm{d}\tilde{z}_t\big)+\frac{1}{2}f''\tilde{\sigma}^2P_t^2\mathrm{d}t \tag{a2.14}$$

に従う．変分不等式より，

$$f(p)=\big(1-(r-\mu_i)\mathrm{d}t\big)\mathbb{E}_t[f(p)+\mathrm{d}f(P_t)] \tag{a2.15}$$

となる．(a2.15) 式に (a2.14) 式を代入し整理すれば，偏微分方程式 (2.42) を得る．

問題 2.7.　問題 2.1 と同様に，初期条件 $C(0)=0$ を考慮すれば，常微分方程式の一般解は $C(x)=A_1x^{\beta}$ となる．それゆえ，バリューマッチング条件 (ii) とスムースペイスティング条件 (iii) は，

$$A_1x^{*\beta}=\frac{x^*}{r-\mu}-I, \tag{a2.16}$$

$$\beta A_1x^{*\beta-1}=\frac{1}{r-\mu}, \tag{a2.17}$$

となる．(a2.16)(a2.18) 式を A_1 と x^* について解けば，命題 2.4 が得られる．

問題 2.8.　伊藤の公式を用いると，x^k は，

$$X_t^k=x^k\mathrm{e}^{k(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+k\sigma z_t} \tag{a2.18}$$

となる．マルコフ性を用いて，(a2.18) 式を代入すれば，価値関数は，

$$\sup_{\tau}\mathbb{E}^x\left[\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{e}^{-rt}X_t^k\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{-r\tau}I\right]=\sup_{\tau}\mathbb{E}^x\left[\mathrm{e}^{-r\tau}\left(\frac{X_\tau^k}{r-\mu k-\frac{1}{2}\sigma^2k(k-1)}-I\right)\right] \tag{a2.19}$$

問題 2.1 と同様に，初期条件 $C(0)=0$ を考慮すれば，常微分方程式の一般解は $C(x)=A_1x^{\beta}$ となる．それゆえ，バリューマッチング条件 (ii) とスムースペイスティング条件 (iii) は，

$$A_1x^{*\beta}=\frac{x^{*k}}{r-k\mu-\frac{1}{2}\sigma^2k(k-1)}-I, \tag{a2.20}$$

$$\beta A_1x^{*\beta-1}=\frac{x^{*k-1}}{r-k\mu-\frac{1}{2}\sigma^2k(k-1)}, \tag{a2.21}$$

となる．(a2.20)(a2.21) 式を A_1 と x^* について解けば，命題 2.5 が得られる．

別証として，パラメータを (2.86) 式のように置き換えれば，価値関数は，

$$C(x)=\left(\frac{x}{x^*}\right)^{k\tilde{\beta}}\left(\frac{(x^*)^k}{r-k\mu-\frac{1}{2}\sigma^2k(k-1)}-I\right),\quad x<x^* \tag{a2.22}$$

臨界値は，

$$x^*=[\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\beta}-1}\big(r-k\mu-\frac{1}{2}\sigma^2k(k-1)\big)I]^{\frac{1}{k}} \tag{a2.23}$$

ただし，$\tilde{\beta}$ は特性方程式 (2.5) においてパラメータ変換 (2.86) を施した場合の正の根であり $\tilde{\beta}=\frac{\beta}{k}$ となる．それゆえ命題 2.5 が得られる．

問題 2.9.　リッカチ型常微分方程式 (2.91)

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -2av(t) - \frac{v^2(t)}{\sigma_\alpha^2} + \sigma_\beta^2,$$

の解を求める．いま，関数 v_t を $v_t := Q_t\frac{u'(t)}{u(t)}$ と設定する．このとき，$v(t)$ を t に関して微分すれば，

$$v'(t) = Q(t)\left[\frac{u''(t)}{u(t)} - \frac{(u'(t))^2}{u^2(t)}\right] + Q'(t)\frac{u'(t)}{u(t)},$$

となるので，リッカチ型常微分方程式 (2.91) は，

$$Q\frac{u''(t)}{u(t)} + Q\left[\frac{1}{\sigma_\alpha^2}Q - 1\right]\frac{(u'(t))^2}{(u(t))^2} + [Q' + 2aQ]\frac{u'(t)}{u(t)} - \sigma_\beta^2 = 0, \tag{a2.24}$$

と書き換えることができる．さらに，Q を $Q = \sigma_\alpha^2$ と仮定するならば，(a2.24) 式は，

$$\sigma_\alpha^2 u''(t) + 2a\sigma_\alpha^2 u'(t) - \sigma_\beta^2 u(t) = 0, \tag{a2.25}$$

と書き換えることができる．常微分方程式 (a2.25) の一般解は，

$$u = A_1\mathrm{e}^{\beta_1 t} + A_2\mathrm{e}^{\beta_2 t},$$

となり，関数 $v(t)$ は $v_t = \sigma_\alpha^2\frac{u'(t)}{u(t)}$ と定義している点に注意すると，常微分方程式の解 v_t は，

$$\begin{aligned} v_t &= \sigma_\alpha^2\frac{A_1\beta_1\mathrm{e}^{\beta_1 t} + A_2\beta_2\mathrm{e}^{\beta_2 t}}{A_1\mathrm{e}^{\beta_1 t} + A_2\mathrm{e}^{\beta_2 t}}, \\ \text{where} \quad & \beta_{1,2} = \sigma_\alpha^{-2}\left(-a\sigma_\alpha^2 \pm \sigma_\alpha\sqrt{a^2\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2}\right), \end{aligned} \tag{a2.26}$$

となる．さらに (a2.26) 式は，

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{\alpha_1 + \frac{A_2}{A_1}\alpha_2\mathrm{e}^{\frac{(\alpha_2-\alpha_1)t}{\sigma_\alpha^2}}}{1 + \frac{A_2}{A_1}\mathrm{e}^{\frac{(\alpha_2-\alpha_1)t}{\sigma_\alpha^2}}}, \\ \text{where} \quad & \alpha_{1,2} = \left(-a\sigma_\alpha^2 \pm \sigma_\alpha\sqrt{a^2\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2}\right), \end{aligned}$$

となる．初期条件 $t = 0$ を考慮すれば，

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\alpha_1 - v_0}{v_0 - \alpha_2},$$

となるので，リッカチ型常微分方程式の解が得られる．

最後に，$\alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0$ から $\alpha_1 - \alpha_2 > 0$ なので，$t \to \infty$ ならば，$v_t \to \alpha_1$ となる．すなわち，時間が十分に経過するならば，v_t は正の定数，$v_t \approx \alpha_1$ となる．

問題 2.10　伊藤の公式より，

$$\mathrm{d}C = C_\mu\mathrm{d}\mu + C_v\mathrm{d}v + \frac{1}{2}C_{\mu\mu}(\mathrm{d}\mu)^2 \tag{a2.27}$$

が得られる．変分不等式から

$$C = (1 - r\mathrm{d}t)\mathbb{E}[C + \mathrm{d}C + \mathrm{d}\xi] \tag{a2.28}$$

が得られ，整理すれば題意が得られる．

問題 3.1. バリューマッチング条件とスムースペイスティング条件を A_2 および x^* について解けばよい．

問題 3.2. まず，$\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} > 0$ を示す．まず，γ は (1.32) 式を満たす負の根なので，(1.32) 式を σ で微分すれば，

$$\frac{\partial Q}{\partial\sigma} + \frac{\partial Q}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} = 0 \tag{a3.1}$$

となる．ただし，

$$\frac{\partial Q}{\partial\sigma} = \sigma\gamma(\gamma - 1) > 0 \tag{a3.2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\gamma} = \gamma\sigma^2 + \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 < 0 \tag{a3.3}$$

となる．仮定 $\mu - \frac{1}{2}\sigma < 0$ より，題意 $\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} > 0$ が得られる．

以下では，$r > \mu$, $\frac{w}{r} - E > 0$ を仮定する．このとき，臨界値に関しては，

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\partial x^*}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} = \frac{-1}{(1-\gamma)^2}(\frac{w}{r} - E)(r - \mu)\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} < 0 \tag{a3.4}$$

価値関数に関しては，

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\partial C}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} = \big(\frac{x}{x^*}\big)^\gamma \log\big(\frac{x}{x^*}\big)\frac{1}{1-\gamma}\big(\frac{w}{r} - E\big)\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} > 0 \tag{a3.5}$$

となる．

問題 3.3. 内生変数 (x_H, x_L, A_1, A_2) より，

$$G(H) := G(x_H, A_1, A_2), \quad G(L) := G(x_L, A_1, A_2)$$

と表記する．このとき，$G(H) = I$, $G(L) = -E$, $G_x(H) = 0$, $G_x(L) = 0$ となる．ただし下添え字は微分を表す．(3.10) を全微分して行列表記すれば，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & G_1(H) & G_1(H) \\ G_{xx}(H) & 0 & G_{1x}(H) & G_{2x}(H) \\ 0 & 0 & G_1(L) & G_2(L) \\ 0 & G_{xx}(L) & G_{1x}(L) & G_{2x}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_H \\ \mathrm{d}x_L \\ \mathrm{d}A \\ \mathrm{d}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}I \\ 0 \\ -\mathrm{d}E \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．ただし下添え字 1,2 は A_1, A_2 の微分を表す．

まず，$\mathrm{d}x_H/\mathrm{d}E$ については，

$$\mathrm{d}x_H = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & G_1(H) & G_2(H) \\ 0 & 0 & G_{1x}(H) & G_{2x}(H) \\ -\mathrm{d}E & 0 & G_1(L) & G_2(L) \\ 0 & G_{xx}(L) & G_{1x}(L) & G_{2x}(L) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & G_1(H) & G_2(H) \\ G_{xx}(H) & 0 & G_{1x}(H) & G_{2x}(H) \\ 0 & 0 & G_1(L) & G_2(L) \\ 0 & G_{xx}(L) & G_{1x}(L) & G_{2x}(L) \end{vmatrix}}$$

となり，行列式を計算すれば，$\mathrm{d}x_H/\mathrm{d}E > 0$ となる．この比較静学では，撤退費用の増大が参入臨界値を増大させることを意味している点に注意されたい．

次に，$\mathrm{d}x_L/\mathrm{d}I$ については，

$$\mathrm{d}x_H = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{d}I & G_1(H) & G_2(H) \\ G_{xx}(H) & 0 & G_{1x}(H) & G_{2x}(H) \\ 0 & 0 & G_1(L) & G_2(L) \\ 0 & 0 & G_{1x}(L) & G_{2x}(L) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & G_1(H) & G_2(H) \\ G_{xx}(H) & 0 & G_{1x}(H) & G_{2x}(H) \\ 0 & 0 & G_1(L) & G_2(L) \\ 0 & G_{xx}(L) & G_{1x}(L) & G_{2x}(L) \end{vmatrix}}$$

となり，行列式を計算すれば $\mathrm{d}x_L/\mathrm{d}I < 0$ となる．この比較静学では，参入費用の増大が撤退臨界値を増大させることを意味している点に注意されたい．

問題 3.4. バリューマッチング条件とスムースペイスティング条件を A_1 と A_2 について解けば，(3.14) 式が得られる．

問題 3.5. ここでは，$C_{(s)}(x)$ における項 $\int (x-w)\mathrm{e}^{-\alpha_i x}\mathrm{d}x$ $(i \in \{1,2\})$ を部分積分すれば十分である．すなわち，

$$\begin{aligned} \int (x-w)\mathrm{e}^{-\alpha_i x}\mathrm{d}x &= \frac{-1}{\alpha_i}(x-w)\mathrm{e}^{-\alpha_i x} + \int \frac{1}{\alpha_i}\mathrm{e}^{-\alpha_i x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{(w-x)}{\alpha_i}\mathrm{e}^{-\alpha_i x} - \frac{1}{\alpha_i^2}\mathrm{e}^{-\alpha_i x} \end{aligned} \tag{a3.6}$$

となる．$C_{(s)}(x)$ に (a3.6) 式を代入して整理すれば (3.20) 式が得られる．

問題 3.6. $C_1(x)$ は，

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^x\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rs}X_s\mathrm{d}s - \int_0^T \mathrm{e}^{-rs}(d_1-d_2)\mathrm{d}s - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-rs}d_2\mathrm{d}s - \mathrm{e}^{-rT}I_2\right] \\ &= \frac{x}{r-\mu} - \frac{d_1-d_2}{r+\lambda} - \frac{d_2}{r} - \frac{\lambda I_2}{r+\lambda} \end{aligned} \tag{a3.7}$$

となる．ただし第 2 項では，

$$
\begin{aligned}
(d_1 - d_2)\mathbb{E}^x\left[\int_0^T \mathrm{e}^{-rs}\mathrm{d}s\right] &= (d_1 - d_2)\int_0^\infty \int_0^T \mathrm{e}^{-rs}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda u}\mathrm{d}s\mathrm{d}u && \text{(a3.8)}\\
&= (d_1 - d_2)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(r+\lambda)s}\mathrm{d}s && \text{(a3.9)}
\end{aligned}
$$

を用いた．

問題 3.7. 1) 変分不等式より，偏微分方程式は

$$
\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 C_0''(x) + \mu x C_0'(x) - rC_0(x) = 0 \tag{a3.10}
$$

となり，一般解は，

$$
C_0(x) = A_1 x^\beta + A_2 x^\gamma \tag{a3.11}
$$

ただし，$\beta > 0$ かつ $\gamma < 0$ である．

2) 境界条件は，

$$
\begin{cases}
\text{(i)} & C_0(0) = 0 & \text{(初期条件)}\\
\text{(ii)} & C_0(x^*) = C_1(x^*) - I_1 & \text{(バリューマッチング条件)}\\
\text{(iii)} & C'(x^*) = C_1'(x^*) & \text{(スムースペイスティング条件)}
\end{cases} \tag{a3.12}
$$

3) $C_0(0) = 0$ より $A_2 = 0$ でなければならない．バリューマッチング条件とスムースペイスティング条件より，

$$
\begin{aligned}
A_1 {x^*}^\beta &= C_1(x^*) - I_1 && \text{(a3.13)}\\
\beta A_1 {x^*}^{\beta-1} &= C_1'(x^*) && \text{(a3.14)}
\end{aligned}
$$

を A_1 と x^* について解けばよい．

問題 4.1. $C_j^{\mathrm{L}}(x)$ は，

$$
C_j^{\mathrm{L}}(x) = \max_{\tau_j^{\mathrm{L}}} \mathbb{E}^x\left[\int_{\tau_j^{\mathrm{L}}}^\infty \mathrm{e}^{-rt}\pi_{10}X_t\mathrm{d}t + \int_{\tau_i^{\mathrm{F}}}^\infty \mathrm{e}^{-rt}(\pi_{11} - \pi_{10})X_t\mathrm{d}t - \mathrm{e}^{-r\tau_j^{\mathrm{L}}}I_j\right] \tag{a4.1}
$$

と書き直すことができる．整理することによって (4.4) 式が得られる．また，投資臨界値は，

$$
x_j^{\mathrm{L}} = \operatorname*{argmax}_y \ \left(\frac{x}{y}\right)^\beta\left(\frac{\pi_{10}}{r-\mu}y - I_j\right) \tag{a4.2}
$$

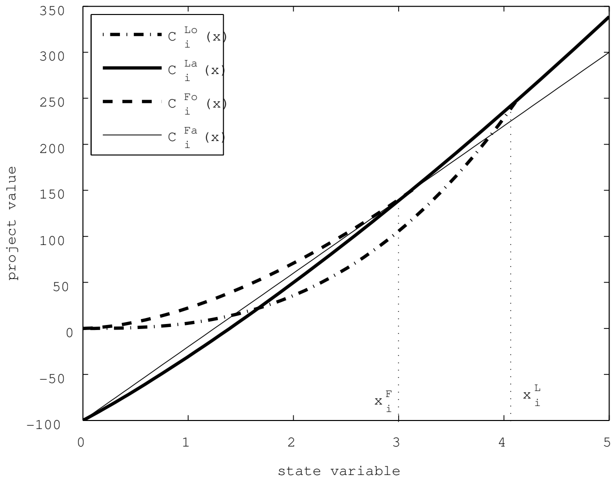
であり，(a4.2) 式を計算することによって (4.5) 式が導出される．

問題 4.2. 1) 価値関数はそれぞれ (4.2) と (4.4) で与えられる．すなわち，戦略的補完の場合でも，価値関数は戦略的代替のそれらと同一となる．

2) (4.6) 式の $C_j^{\mathrm{L}}(x)$ が x に対して凸となる理由は，$\beta > 1$ と $\pi_{11} < \pi_{10}$ から明らかである．

3) 戦略的補完の場合でも，価値関数は戦略的代替のそれらと同一となる．

4) 下記のような図となる．



5) 各企業は x_i^{F} で投資を実行する．

問題 4.3. 明らかに，

$$x_i^* = \underset{x_i}{\operatorname{argmax}} \ \left(\frac{x}{x_i}\right)^\beta (x_i - I_i), \quad i \in \{1, 2\} \tag{a4.3}$$

が成立する．(x_1^*, x_2^*) を (4.10) に代入すれば，(4.12) が得られる．

問題 4.4. (4.17) 式を x_1 と x_2 で微分すれば，x_1^{**} と x_2^{**} が得られる．

問題 4.5. $C_{\mathrm{o}}^{**}(x)$ を σ で微分すれば，

$$\frac{\mathrm{d}C_{\mathrm{o}}^{**}}{\mathrm{d}\sigma} = \left(\frac{\partial C_{\mathrm{o}}^{**}}{\partial x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial \beta} + \frac{\partial C_{\mathrm{o}}^{**}}{\partial x_2^{**}}\frac{\partial x_2^{**}}{\partial \beta} + \frac{\partial C_{\mathrm{o}}^{**}}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} = \frac{\partial C_{\mathrm{o}}^{**}}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} \tag{a4.4}$$

となる．ここでは，包絡面定理 $\partial C_{\mathrm{o}}^{**}/\partial x_1^* = \partial C_{\mathrm{o}}^{**}/\partial x_2^{**} = 0$ を用いた．それゆえ，$x < x_1^*$ および $\partial\beta/\partial\sigma < 0$ より，

$$\frac{\mathrm{d}C_{\mathrm{o}}^{**}}{\mathrm{d}\sigma} = \left(q\left(\frac{x}{x_1^*}\right)^\beta \frac{I_1}{\beta - 1}\log\left(\frac{x}{x_1^*}\right) + (1-q)\left(\frac{x}{x_2^{**}}\right)^\beta \frac{I_2 + \frac{q}{1-q}\Delta I}{\beta - 1}\log\left(\frac{x}{x_2^{**}}\right)\right)\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} \geq 0 \tag{a4.5}$$

となる．$C_{\mathrm{m}}^{**}(x)$ を σ で微分すれば，

$$\frac{\mathrm{d}C_{\mathrm{m}}^{**}}{\mathrm{d}\sigma} = \left(\frac{\partial C_{\mathrm{m}}^{**}}{\partial x_2^{**}}\frac{\partial x_2^{**}}{\partial \beta} + \frac{\partial C_{\mathrm{m}}^{**}}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} = q\left(\frac{x}{x_2^{**}}\right)^\beta \Delta I\left(\log\left(\frac{x}{x_2^*}\right) + (-\beta)x_2^{**}\frac{\partial x_2^{**}}{\partial \beta}\right) \tag{a4.6}$$

となる．また，$\partial x_2^{**}/\partial\beta = \frac{-x_2^{**}}{\beta(\beta-1)}$ より題意を得る．