THE RESOLUTION OF SIMPLE CURVE SINGULARITIES

川崎健

Contents

1. 序

C を代数曲線, P をその特異点とする.

$$\mathcal{O}^{\wedge}_{C,P} \cong k[\![x,y]\!]/(x^{n+1} - y^2) \quad (n \geq 1)$$

を満たすとき, P は A_n 型の特異点という. 特に $n = 1$, 2, 3 のとき, それぞれ node, cusp, tacnode という. 例えばデカルトの葉線, レムニスケートの原点は A_1 型, カージオイドの原点は A_2 型の特異点である.

同様に $\mathcal{O}^{\wedge}_{C,P}$ が $k[\![x,y]\!]$ を

$$x^{n-1} - xy^2 \quad (n \geq 4), \quad x^4 - y^3, \quad x^3y - y^3, \quad x^5 - y^3$$

で modulo した環と同型になるとき, それぞれ D_n, E_6, E_7, E_8 型の特異点という. これらを総称して単純特異点という.

平面曲線がこれらの特異点を持つときその埋め込まれた特異点解消を求める.

Date: Sep. 2020.

本稿は, 2020 年東京都立大学で行った大学院講義の課題の解説として執筆した.

2. 一点ブローイングアップ

k を体, $X=k^2$ を k 上の二次元アフィン空間 (座標は x, y) とする. X の原点 P におけるブローイングアップを次のように定義する.

Y_1, Y_2 を二次元アフィン空間, それぞれの座標を x と v, u と y とする. Y_1 の開集合から Y_2 の開集合への写像 φ を

$$\varphi\colon \{(x,v)\mid v\neq 0\}\to\{(u,y)\mid u\neq 0\},\quad (x,v)\mapsto(1/v,xv)$$

で定めると同型. Y_1, Y_2 を φ で張り合わせたものを Y とする. Y_1, $Y_2\subset Y$ とみなす.

また射 $\pi_1\colon Y_1\to X$ を $(x,v)\mapsto(x,xv)$, $\pi_2\colon Y_2\to X$ を $(u,y)=(yu,y)$ で定義すると $\pi_1=\pi_2\varphi$. よって π_1, π_2 の張り合わせ $\pi\colon Y\to X$ が得られる.

π, または Y を X の原点 P におけるブローイングアップという.

P を原点でない点とするとき, 原点を P にうつす平行移動と, 原点におけるブローイングアップの合成を P におけるブローイングアップという.

$E=\pi^{-1}(\{P\})$ は Y_1 内の直線 $x=0$ と Y_2 内の直線 $y=0$ を $(0,v)\mapsto(1/v,0)$ によって張り合わせたものだから射影直線と同型. これを例外曲線という.

曲線 $C\subset X$ に対し

$$\tilde{C}=\overline{\pi^{-1}(C\setminus\{P\})}\subset Y$$

を C の strict transform という. $f=0$ を C の方程式とするとき

$$f(x,xv)=x^nf_1(x,v),\quad (f_1 \text{ は } x \text{ で割り切れない})$$

と置けば, $f_1=0$ は $\tilde{C}\cap Y_1$ の方程式. 同様に

$$f(yu,y)=y^nf_2(u,y),\quad (f_2 \text{ は } y \text{ で割り切れない})$$

と置けば, $f_2=0$ は $\tilde{C}\cap Y_2$ の方程式. ここで n は二つの式で一致する.

$k=\boldsymbol{R}$ のとき Y を次のように考えることができる.

$$V_1=\{(x,v)\mid |v|\leq 1\},\quad V_2=\{(u,y)\mid |u|\leq 1\}$$

と置く. すると V_1, V_2 を上端は同じ向き, 下端は逆向きに張り合わせたものが Y. つまり Y は幅が無限のメビウスの輪.

また $Y_2\setminus Y_1=\{(0,y)\mid y\in\boldsymbol{R}\}$ であるから平面 Y_1 を上下が有限の幅になるように縮め, 上端と下端を逆向きに張り合わせたものともみなせる.

3. A_n 型特異点

$f=x^{n+1}-y^2$, C: $f=0$ と置く. $f_x=(n+1)x^n$, $f_y=-2y$ だから $n\geq 1$ のとき C は $(0,0)$ にただ一つ特異点を持つ.

3.1. $n=1$ のとき. C: $f=0$ は原点で交わる二直線. これを原点で一点ブローイングアップする.

$y=xv$ とおくと

$$0=x^2-y^2=x^2-(xv)^2=x^2(1-v^2)$$

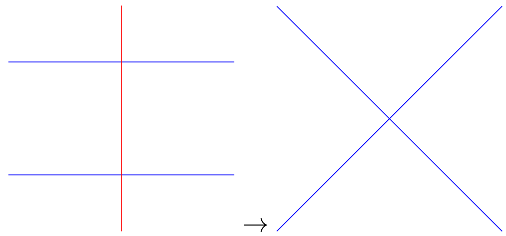
だから $\tilde{C}\cap Y_1$ は $v=\pm1$. $E\cap Y_1$ は $x=0$.

$x=yu$ とおくと

$$0=x^2-y^2=(yu)^2-y^2=y^2(u^2-1)$$

$u^2-1=0$ と y 軸の逆像 $u=0$ は交わらない. つまり strict transform $\tilde{C}$ は Y_1 に含まれている.

よって一回ブローイングアップしただけで埋め込まれた特異点解消が得られる.



ここで C, $\tilde{C}$ は青線, 例外曲線は赤線. 以下同様.

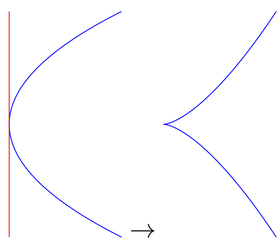
3.2. $n = 2$ **のとき.** $y = xv$ とおくと

$$0 = x^3 - (xv)^2 = x^2(x - v^2).$$

よって $\tilde{C} \cap Y_1$ は放物線 $x = v^2$. $E \cap Y_1$ は $x = 0$.
$x = yu$ とおくと

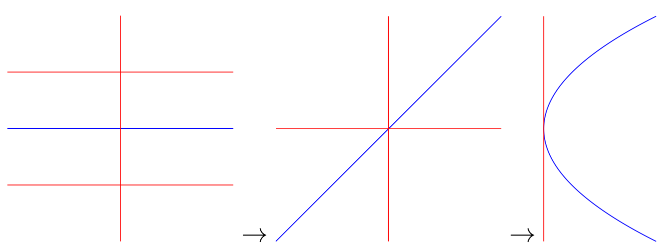
$$0 = (yu)^3 - y^2 = y^2(yu^3 - 1).$$

よって strict transform $\tilde{C}$ は Y_1 に含まれている.



$\tilde{C}$ を xy 平面の放物線 $x = y^2$ とみなすと, 例外曲線は $y = 0$. $\tilde{C}$ は非特異だが, まだ埋め込まれた特異点解消ではない. これを原点で一点ブローイングアップすると strict transform は Y_2 に含まれており, その方程式は $u = y$. 例外因子は $u = 0$ と $y = 0$.

もう一回, 一点ブローイングアップすると埋め込まれた特異点解消が得られる.



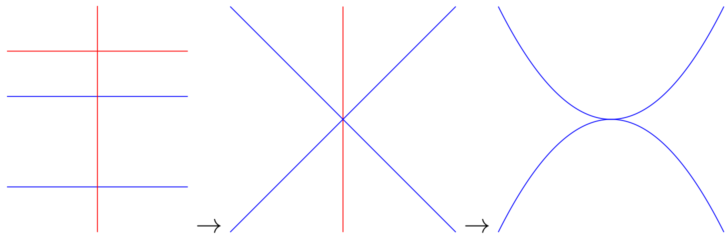
3.3. $n = 3$ **のとき.** $y = xv$ とおくと

$$0 = x^4 - (xv)^2 = x^2(x^2 - v^2).$$

よって $\tilde{C} \cap Y_1$ は A_1 特異点を一つ持つ. また $x = yu$ とおくと

$$0 = (yu)^4 - y^2 = y^2(y^2u^4 - 1).$$

よって $\tilde{C}$ は Y_1 に含まれている．Y_1 の原点で一点ブローイングアップすれば埋め込まれた特異点解消が得られる．



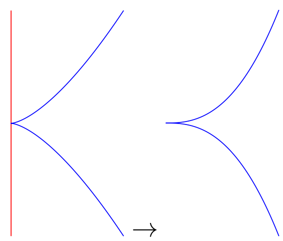
3.4. $n=4$ のとき． $y=xv$ とおくと

$$0=x^5-(xv)^2=x^2(x^3-v^2).$$

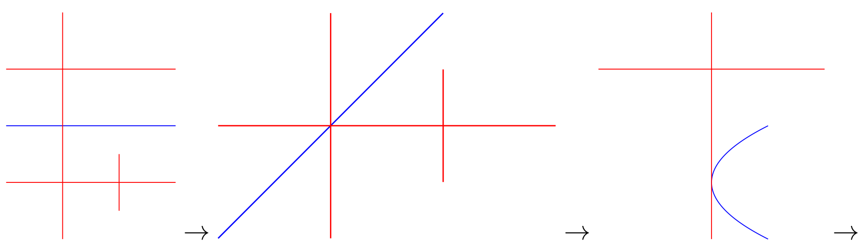
よって $\tilde{C}\cap Y_1$ は A_2 特異点を一つ持つ．また $x=yu$ とおくと

$$0=(yu)^5-y^2=y^2(y^3u^5-1).$$

よって $\tilde{C}$ は Y_1 に含まれている．



A_2 特異点と同様にあと 3 回一点ブローイングアップすれば埋め込まれた特異点解消ができる．



3.5. $n\geq 3$ のとき． 一般に $n\geq 3$ とすると $y=xv$ と置いて

$$0=x^n-y^2=x^n-(xv)^2=x^2(x^{n-2}-v^2).$$

よって $\tilde{C}\cap Y_1$ は A_{n-2} 特異点を一つ持つ．また $x=yu$ とおくと

$$0=(yu)^n-y^2=y^2(y^{n-2}u^n-1).$$

よって $\tilde{C}$ は Y_1 に含まれている．

よって $n=2m-1$ (m は整数) のとき m 回の一点ブローイングアップで埋め込まれた特異点解消が得られる．

また $n=2m$ (m は整数) のとき $m+2$ 回の一点ブローイングアップで埋め込まれた特異点解消が得られる．

4. D_n 型特異点

$f = x^{n-1} - xy^2$ $(n \geq 4)$, C: $f = 0$ とおく. $f_x = (n-1)x^{n-2} - y^2$, $f_y = 2xy$ だから C は原点にただ一つ特異点を持つ.

また C は $x = 0$ と A_{n-3}: $x^{n-2} - y^2 = 0$ の和.

4.1. $n = 4$ のとき. これは原点で交わる三直線. これを原点で一点ブローイングアップする. $y = xv$ とおくと

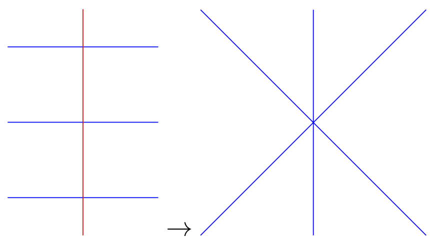
$$0 = x^3 - xy^2 = x^3 - x(xv)^2 = x^3(1 - v^2).$$

よって $\tilde{C} \cap Y_1$ は二直線 $v = \pm 1$. $\tilde{C}$ と x 軸は交わらないから, $\tilde{C} \subset Y_2$ である.

$x = yu$ とおくと

$$0 = (yu)^3 - (yu)y^2 = y^3(u^3 - u).$$

よって $\tilde{C} \cap Y_2$ は三直線 $u = 0$ と $u = \pm 1$. ここで直線 $u = \pm 1$ と $v = \pm 1$ は同じ直線である.



つまり $\tilde{C}$ は交わらない三直線からなり, これが埋め込まれた特異点解消.

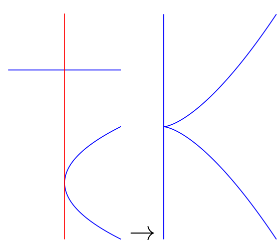
4.2. $n = 5$ のとき. これは $x = 0$ と A_2: $x^3 - y^2 = 0$ の和. $y = xv$ とおくと

$$0 = x^5 - x(xv)^2 = x^3(x^3 - v^2).$$

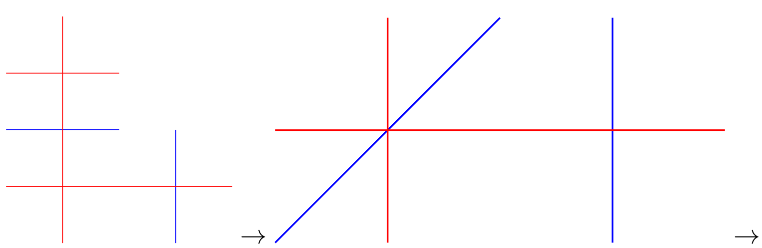
$x = yu$ とおくと

$$0 = (yu)^5 - (yu)y^2 = y^3u(yu^3 - 1).$$

よって $\tilde{C}$ は放物線 $x = v^2$ と直線 $u = 0$ の交わらない和.



A_2 と同様にして埋め込まれた特異点解消が得られる.

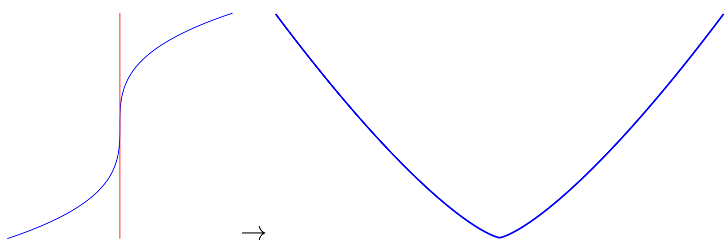


4.3. $n \geq 6$ **のとき.** これは $x=0$ と A_{n-3}: $x^{n-2}-y^2=0$ の和. $y=xv$ とおくと
$$0 = x^{n-1} - xy^2 = x^{n-1} - x(xv)^2 = x^3(x^{n-4} - v^2).$$
$x = yu$ とおくと
$$0 = (yu)^{n-1} - (yu)y^2 = y^3 u(y^{n-4}u^{n-2} - 1).$$
よって $\tilde{C}$ は A_{n-5}: $x^{n-4} - v^2 = 0$ と直線 $u=0$ の交わらない和. 残りは A_{n-5} と同様にして埋め込まれた特異点解消が得られる.

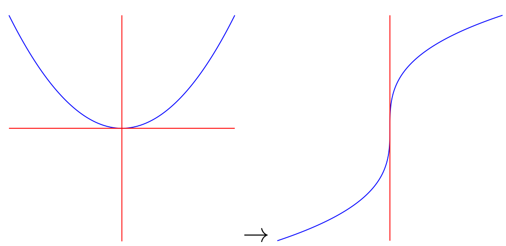
5. E_6 型特異点

$f = x^4 - y^3$, C: $f=0$ と置く. $f_x = 4x^3$, $f_y = 3y^2$ だから原点がただ一つの特異点.

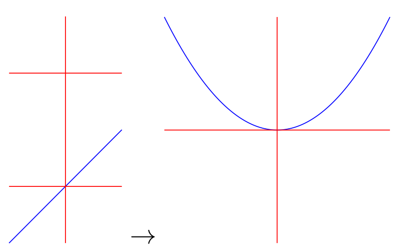
これを原点で一点ブローイングアップする. $y = xv$ とおくと
$$0 = x^4 - y^3 = x^4 - (xv)^3 = x^3(x - v^3).$$
$x = yu$ とおくと
$$0 = (yu)^4 - y^3 = y^3(yu^4 - 1).$$
よって $\tilde{C} \subset Y_1$ は非特異.



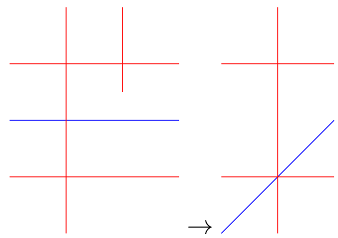
変数を置き換え $\tilde{C}$: $x - y^3 = 0$ とし, 原点で一点ブローイングアップする. $y = xv$ と置いて
$$0 = x^3 - y = x^3 - xv = x(x^2 - v).$$
$x = yu$ と置いて
$$0 = (yu)^3 - y = y(y^2u^3 - 1).$$
よって total transform は



もう一回, 一点ブローイングアップ.



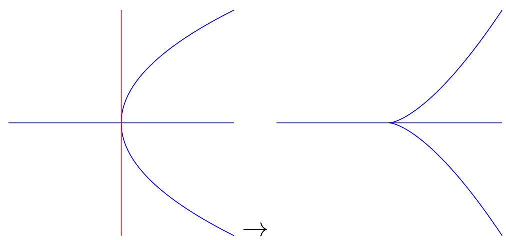
最後



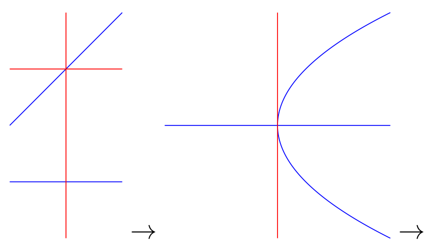
6. E_7 型特異点

$f = x^3y - y^3 = y(x^3 - y^2)$, C: $f = 0$ とする．これは $y = 0$ と A_2 の和．$f_x = 3x^2y$, $f_y = x^3 - 3y^2$ 故原点がただ一つの特異点．

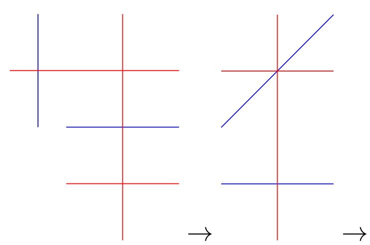
原点で一点ブローイングアップする．



もう一回，一点ブローイングアップ．



最後



7. E_8 型特異点

$f = x^5 - y^3$, C: $f = 0$ とする．$f_x = 5x^4$, $f_y = 3y^2$ だから原点がただ一つの特異点．

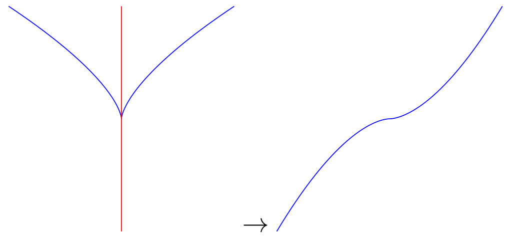
原点で一点ブローイングアップする．$y = xv$ とおいて

$$0 = x^5 - y^3 = x^5 - (xv)^3 = x^3(x^2 - v^3).$$

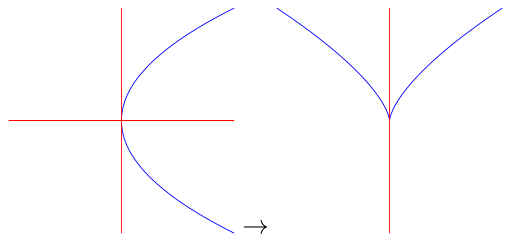
$x = yu$ と置いて

$$0 = (yu)^5 - y^3 = y^3(y^2u^5 - 1).$$

よって $\tilde{C} \subset Y_1$ で, $\tilde{C}$ は A_2 に等しい.



もう一回, 一点ブローイングアップすれば E_6 特異点の途中と一致する.



あとは E_6 特異点と同じ.