THE NORMALIZATION OF THE CARDIOID

川崎健

Contents

1. 序

カージオイド (cardioid) ・デカルトの葉線 (folium of Descartes) ・レムニスケート (lemniscate) は学部 1 年の微分積分でも取り上げられることの多い代数曲線である．これらは特異点を持つ．それらの正規化 (特異点解消) を求める．

2. カージオイドについて

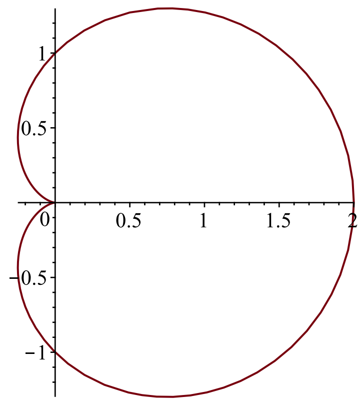
k を標数が 2 でない代数的閉体,

$$f(x,y) = (x^2+y^2-x)^2 - (x^2+y^2)$$

Date: Sep. 2020.

本稿は, 2020 年東京都立大学で行った大学院講義の課題の解説として執筆した.

とする．平面曲線 C: $f=0$ をカージオイドというのであった．



2.1. **既約性．** まず

$$f(x,y)=y^4+(2x^2-2x-1)y^2+x^3(x-2)$$

が $k[x,y]$ の元として既約なことをいおう．これが既約でなければ

$$f(x,y)=(y^3+ay^2+by+c)(y+d) \tag{1}$$

または

$$f(x,y)=(y^2+ay+b)(y^2+cy+d) \tag{2}$$

と書ける．ただし a, b, c, $d\in k[x]$.

(1) のとき, 両辺の係数を比べて

$$\begin{aligned} 0&=a+d,\\ 2x^2-2x-1&=ad+b,\\ 0&=c+bd,\\ x^3(x-2)&=cd. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} d&=-a,\\ 2x^2-2x-1&=b-a^2,\\ c&=ab,\\ x^3(x-2)&=-a^2b. \end{aligned}$$

$x^3(x-2)=-a^2b$ で $k[x]$ は一意分解整域だから $a=\alpha$ または $a=\alpha x$ $(0\neq\alpha\in k)$. a が決まれば, b, c も決まる．

a	α	αx
b	$-\alpha^{-2}x^3(x-2)$	$-\alpha^{-2}x(x-2)$
c	$-\alpha^{-1}x^3(x-2)$	$-\alpha^{-1}x^2(x-2)$
$b-a^2$	$-\alpha^{-2}x^3(x-2)-\alpha^2$	$-\alpha^{-2}x(x-2)-\alpha^2x^2$

しかしどの場合も $b-a^2$ の条件を満たさない．

(2) のとき, 両辺の係数を比べて

$$\begin{aligned} 0 &= a + c, \\ 2x^2 - 2x - 1 &= b + ac + d, \\ 0 &= ad + bc, \\ x^3(x-2) &= bd. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} c &= -a, \\ b + d - a^2 &= 2x^2 - 2x - 1, \\ a(d-b) &= 0, \\ bd &= x^3(x-2). \end{aligned}$$

$x^3(x-2)$ は平方元でないから $b \neq d$. よって $c = a = 0$.

b と d の役割は対称だから b は αx^3, αx^2, αx, α $(0 \neq \alpha \in k)$ のどれかとしてよい.

b	αx^3	αx^2	αx	α
d	$\alpha^{-1}(x-2)$	$\alpha^{-1}x(x-2)$	$\alpha^{-1}x^2(x-2)$	$\alpha^{-1}x^3(x-2)$.

しかしどの場合も $b + d = 2x^2 - x - 1$ を満たさない.

これで f が既約なことが分かった.

なお k の標数が 2 のときは f は既約でない.

2.2. 特異点. カージオイドの特異点を求める.

$$f_x = 2(x^2 + y^2 - x)(2x - 1) - 2x, \quad f_y = 2y(2x^2 + 2y^2 - 2x - 1).$$

$f = f_x = f_y = 0$ とすると $2y(2x^2 + 2y^2 - 2x - 1) = 0$ だから $y = 0$ または $2(x^2 + y^2 - x) = 1$.

$y = 0$ とすると $0 = f(x, 0) = x^3(x-2)$ だから $x = 0$ または $x = 2$. $x = 0$ とすると $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ だから $(0,0)$ は C の特異点. しかし $f_x(2,0) = 8 \neq 0$ だから $(2,0)$ は特異点でない.

一方 $x^2 + y^2 - x = 1/2$ のとき $f(x,y) = 1/4 - (x + 1/2) = -x - 1/2$. よって $x = -1/4$. $x^2 + y^2 = 1/2 + x = 1/4$ だから $y = 0$. しかし $(-1/2, 0)$ は C 上の点でない.

2.3. 座標環・関数体. C の座標環とその商体 (関数体) を求める.

一時的に $k = \boldsymbol{R}$ とする. このときカージオイドは極座標で

$$r = 1 + \cos\theta$$

とパラメーター表示される. つまり

$$x = (1 + \cos\theta)\cos\theta, \quad y = (1 + \cos\theta)\sin\theta.$$

$t = \tan\theta/2$ と置けば

$$\cos\theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1 + t^2}$$

だから, カージオイド C は

$$x = \frac{2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}, \quad y = \frac{4t}{(1 + t^2)^2}$$

とパラメーター表示される.

k が一般の代数的閉体の場合に戻ろう．k 代数の射 $\varphi\colon k[x,y] \to k(t)$ を

$$\varphi(x) = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \quad \varphi(y) = \frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

で定義すると $f \in \ker\varphi$ である．実際

$$\varphi(x)^2 + \varphi(y)^2 = \frac{4}{(1+t^2)^2}, \quad \varphi(x)^2 + \varphi(y)^2 - \varphi(x) = \frac{2}{1+t^2}$$

だから $\varphi(f) = f(\varphi(x), \varphi(y)) = 0$.

$\ker\varphi$ は素イデアル, $\dim k[x,y] = 2$ だから

- $\ker\varphi = (f)$, または
- $\ker\varphi$ は極大イデアル.

後者の時 $\operatorname{im}\varphi = k[\varphi(x), \varphi(y)]$ は体．ヒルベルトの零点定理によりこれは k 上代数的．しかし

$$t = \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)^2 + \varphi(y)^2 - \varphi(x)} \tag{3}$$

は k 上超越的かつ $\operatorname{im}\varphi$ の元．これは矛盾.

したがって $\ker\varphi = (f)$, $k[C] = k[x,y]/(f) \cong k[\varphi(x), \varphi(y)] \subset k(t)$ がわかった．(3) から $k[\varphi(x), \varphi(y)]$ の商体は $k(t)$ であることもわかる.

2.4. **正規化．** $A = k[\varphi(x), \varphi(y)]$ を正規化しよう．

$$u = \frac{1}{1+t^2}, \quad v = \frac{t}{1+t^2}$$

と置く．

$$\varphi(x) = 2(u^2 - v^2), \quad \varphi(y) = 4uv$$

だから $A \subset k[u,v]$．そして

$$u = \frac{1}{2}(\varphi(x)^2 + \varphi(y)^2 - \varphi(x)) \in A.$$

また

$$v^2 = u - u^2 \in A$$

だから v は A 上整．$t = v/u \in Q(k[u,v])$ だから $Q(k[u,v]) = k(t)$．よって $k[u,v]$ の整閉包は A の整閉包に等しい．

$k[u,v]$ が整閉であることをいおう．$k[u,v] \subset k[t,u]$ で $k[t,u]$ は整閉整域 $k[t]$ の局所化だから整閉．よって $k[u,v]$ 上整な $k(t)$ の元は

$$F(t)/(1+t^2)^l, \quad F(t) \in k[t], l \geq 0$$

と書ける．これが $k[u,v]$ の元であることをいう．$F(t)$ を繰り返し $1+t^2$ で割って

$$\frac{F(t)}{(1+t^2)^l} = G(t) + \frac{H_1(t)}{1+t^2} + \cdots + \frac{H_l(t)}{(1+t^2)^l}, \quad G(t) \in k[t]$$

と書ける．ただし $H_i(t) \in k[t]$ は高々 1 次式．第 2 項以降は $k[u,v]$ の元なので $G(t)$ は $k[u,v]$ 上整.

$G(t)$ の $k[u,v]$ 上の最小多項式を考えるとある整数 n があって

$$G^n + P_1 G^{n-1} + \cdots + P_{n-1} G + P_n, \quad P_1, \ldots, P_n \in k[u,v]. \tag{4}$$

P_i は u, v の多項式だから m を十分大きくとれば

$$P_1 = \frac{Q_1}{(1+t^2)^m}, \ldots, P_n = \frac{Q_n}{(1+t^2)^m}, \quad Q_1, \ldots, Q_m \in k[t], \deg Q_i \leq 2m$$

とできる．これを (4) に代入して

$$(1+t^2)^m G = -Q_1 G^{n-1} - \cdots - Q_{n-1} G - Q_n.$$

両辺の次数を比べると

$$2m + n \deg G \le 2m + (n-1) \deg G.$$

よって $\deg G \le 0$. つまり G は定数であり, $G \in k[u,v]$.

2.5. 特異点解消. $u^2+v^2=u$ であり, 変形して $(u-1/2)^2+v^2=1/4$. つまり $\tilde{C} = \operatorname{Spec} k[u,v]$ は $(1/2,0)$ を中心とする半径 $1/2$ の円. 射 $\tilde{C} \to C$ は $(u,v) \mapsto (2(u^2-v^2), 4uv)$ で与えられる．これは C の特異点解消.

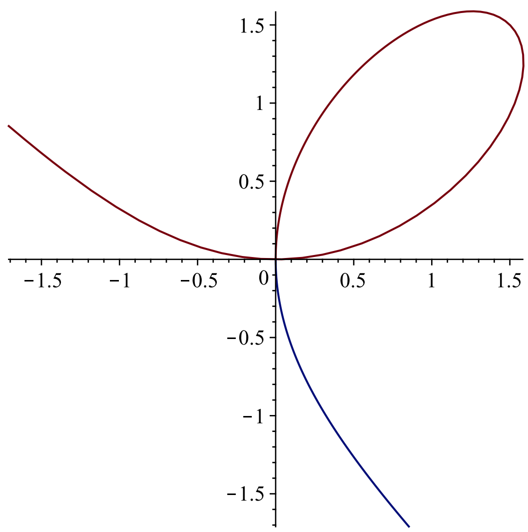
3. デカルトの葉線

デカルトの葉線・レムニスケートについては概略のみ.

k を標数が 2, 3 でない代数的閉体,

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

とする．C: $f=0$ をデカルトの葉線というのであった.



3.1. 既約性. $f(x,y)$ が可約ならば

$$f = (x^2+ax+b)(x+c), \quad a,b,c \in k[y]$$

と書ける．両辺の係数を比べて

$$\begin{aligned} a + c &= 0, \\ b + ac &= -3y, \\ bc &= y^3. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} c &= -a, \\ b - a^2 &== 3y, \\ ab &= -y^3. \end{aligned}$$

$k[y]$ は一意分解整域だから

$$\begin{array}{c|cccc} a & \alpha & \alpha y & \alpha y^2 & \alpha y^3 \\ \hline b & -\alpha^{-1}y^3 & -\alpha^{-1}y^2 & -\alpha^{-1}y & -\alpha^{-1}. \end{array}$$

どの場合も $b - a^2 = -3y$ を満たさない.

3.2. 特異点. 次に特異点を求める. $f_x = 3x^2 - 3y$, $f_y = 3y^2 - 3x$ である. $f = f_x = 0$ から $x^3(x^3 - 2) = 0$. よって $x = 0$ または $x = \sqrt[3]{2}$.

同様に $f = f_y = 0$ から $y = 0$ または $y = \sqrt[3]{2}$.

双方を満たすのは $(x, y) = (0, 0)$ のみ.

3.3. 座標環. 一時的に $k = \boldsymbol{R}$ とする. 原点を通る直線 $y = tx$ と C: $f(x, y) = 0$ の交点を求める.

$$0 = f(x, tx) = (1 + t^3)x^3 - 3tx^2.$$

よって $x \neq 0$ ならば

$$x = \frac{3t}{1 + t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1 + t^3}.$$

C は原点以外このように t の有理式で表すことができ, $t = 0$ とすれば原点もこの式で表される.

k を代数的閉体とする. カージオイドと同様に

$$k[C] \cong A = k\left[\frac{t}{1 + t^3}, \frac{t^2}{1 + t^3}\right]$$

が証明される. $Q(A) = k(t)$ も言える.

3.4. 正規化. A の正規化を求める. $u = 1/(1 + t^3)$ とすると

$$u^2 - u = -\frac{t^3}{(1 + t^3)^2} = -\frac{t}{1 + t^3}\frac{t^2}{1 + t^3}.$$

よって u は A 上整.

$$k\left[\frac{1}{1 + t^3}, \frac{t}{1 + t^3}, \frac{t^2}{1 + t^3}\right]$$

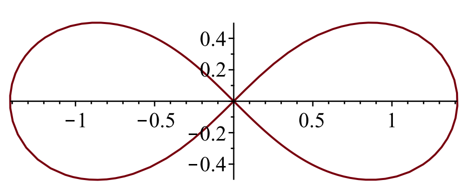
が整閉であることはカージオイドの時と同様.

4. レムニスケートについて

k を標数が 2 でない代数的閉体,

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$$

とする. C: $f = 0$ をレムニスケートというのであった.



4.1. 既約性.

$$f(x,y) = x^4 + 2(y^2-1)x^2 + y^2(y^2+2)$$

がもし可約ならば

$$f(x,y) = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d) \tag{1}$$

または

$$f(x,y) = (x^3+ax^2+bx+c)(x+d) \tag{2}$$

と書ける. ただし $a, b, c, d \in k[y]$.

(1) のとき, 両辺の係数を比べて

$$\begin{aligned} 0 &= a+c, \\ 2(y^2-1) &= b+ac+d, \\ 0 &= bc+ad, \\ y^2(y^2+2) &= bd. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} c &= -a, \\ b+d-a^2 &= 2(y^2-1), \\ (b-d)a &= 0, \\ bd &= y^2(y^2+2). \end{aligned}$$

$y^2(y^2+2)$ は平方元でないから $b \neq d$. よって $a = 0$. 一方

$$(b-d)^2 = (b+d)^2 - 4bd = -4(2y-1)(2y+1).$$

右辺は平方元でないから矛盾.

(2) のとき, 両辺の係数を比べて

$$\begin{aligned} 0 &= a+d, \\ 2(y^2-1) &= b+ad, \\ 0 &= c+bd, \\ y^2(y^2+2) &= cd. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} d &= -a, \\ b-a^2 &= 2(y^2-1), \\ c &= ab, \\ a^2b &= -y^2(y^2+2). \end{aligned}$$

$k[y]$ は一意分解整域だから $a = \alpha$ または $a = \alpha y$ $(0 \neq \alpha \in k)$.

a	α	αy
b	$-\alpha^{-2}y^2(y^2+2)$	$-\alpha^{-2}(y^2+2)$

どちらにせよ $b - a^2 = 2(y^2-1)$ は成り立たない.

これで f が既約なことが分かった.

4.2. 特異点.

$$f_x = 4x(x^2+y^2-x), \quad f_y = 4y(x^2+y^2+1)$$

であり $f = f_x = f_y = 0$ を解いて, C の特異点は原点 $(0,0,0)$ のみ.

4.3. 座標環. レムニスケート C は

$$x = \frac{2t(1+2t^2)}{1+4t^4}, \quad y = \frac{2t(1-2t^2)}{1+4t^4}$$

とパラメーター表示される[1] ので C の座標環は

$$A = k\left[\frac{2t(1+2t^2)}{1+4t^4}, \frac{2t(1-2t^2)}{1+4t^4}\right]$$

と同型.

$$\frac{t}{1+4t^4} = \frac{1}{4}\left(\frac{2t(1+2t^2)}{1+4t^4} + \frac{2t(1-2t^2)}{1+4t^4}\right) \in A,$$
$$\frac{t^3}{1+4t^4} = \frac{1}{8}\left(\frac{2t(1+2t^2)}{1+4t^4} - \frac{2t(1-2t^2)}{1+4t^4}\right) \in A,$$

だから t^2, $1+4t^4$, $t \in Q(A)$ であって $Q(A) = k(t)$.

4.4. 正規化.

$$\left(\frac{t^2}{1+4t^4}\right)^2 = \frac{t}{1+4t^4}\frac{t^3}{1+4t^4},$$
$$\left(\frac{1}{1+4t^4}\right)^2 - \frac{1}{1+4t^4} = 4\frac{t}{1+4t^4}\frac{t^3}{1+4t^4}$$

だから A の正規化は

$$k\left[\frac{1}{1+4t^4}, \frac{t}{1+4t^4}, \frac{t^2}{1+4t^4}, \frac{t^3}{1+4t^4},\right]$$

[1]杉浦, 解析入門 II, p. 40.