シンプレクティック多様体の基礎

赤穂まなぶ
東京都立大学

はじめに

本稿は 2019 年度に当時の首都大学東京および 2020 年度と 2022 年度に東京都立大学で大学院生向けに行った講義の内容をまとめたものである. 講義の目標はベクトル場や微分形式など多様体の基本的な内容を修得した学生が, シンプレクティック多様体の基礎を学び具体的な計算を自らの手でできるようになることであった.

本稿はあまりテーマが発散しないように, シンプレクティック多様体を扱う際に必要となる基本的な内容の解説と, Kähler 多様体, 余随伴軌道, シンプレクティック商の定義とそれらの基本的な例の紹介に限った. 本来であればトーリック多様体についても解説したかったのだが, それは筆者の力不足で叶わなかった. また, Lagrange 部分多様体の詳細についても触れることができなかったので, それについては別の機会に述べてみたい.

2023 年 1 月

目次

第 1 章 シンプレクティック多様体

§1.1 シンプレクティック多様体 …… 1

§1.2 シンプレクティック多様体の局所理論 …… 6

§1.3 Hamilton ベクトル場 …… 9

§1.4 Lagrange 部分多様体 …… 14

§1.5 Lagrange 管状近傍定理 …… 17

第 2 章 Kähler 多様体

§2.1 Kähler 多様体 …… 22

§2.2 複素多様体上の微分形式 …… 25

§2.3 複素射影空間 …… 32

第 3 章 余随伴軌道

§3.1 Lie 群 …… 37

§3.2 Lie 環 …… 40

§3.3 余随伴軌道 …… 43

第 4 章 シンプレクティック商

§4.1 運動量写像 …… 49

§4.2 シンプレクティック商 …… 55

§4.3 複素射影空間上のシンプレクティック形式 …… 61

第 1 章　シンプレクティック多様体

§ 1.1　シンプレクティック多様体

この節ではまず, 線形代数からの準備としてシンプレクティックベクトル空間について解説し, 次にシンプレクティック多様体の定義と簡単な例を挙げ, 最後にシンプレクティック多様体の基本的な性質を述べる.

定義 1.1.1　実ベクトル空間 V 上の交代形式 $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ が非退化, すなわち $u \in V$ が任意の $v \in V$ に対して $\omega(u, v) = 0$ ならば $u = 0$ となるとき, ω を V 上の**シンプレクティック形式**とよび, 組 (V, ω) を**シンプレクティックベクトル空間**とよぶ.

V が有限次元のとき, ω が非退化であることと, $u \in V$ に対して V の双対空間 V^* の元 $\omega(u, \cdot) \in V^*$ を対応させる線形写像が V から V^* への同型写像になることは同値である.

以下では特に断らない限り, シンプレクティックベクトル空間は有限次元とする.

補題 1.1.2　シンプレクティックベクトル空間は偶数次元である.

証明　$\{e_1, \ldots, e_m\}$ を V の基底とし, $\omega_{ij} := \omega(e_i, e_j)$ とする. m 次正方行列 $A := [\omega_{ij}]$ は, A の転置行列を ${}^tA$ とすると, ω が交代形式であることから ${}^tA = -A$ となり, また ω が非退化であることから A は正則行列となる. したがって A の行列式を $\det A$ とすると

$$\begin{aligned} \det A &= \det {}^tA \\ &= \det(-A) \\ &= (-1)^m \det A \end{aligned}$$

となり, $\det A \neq 0$ と合わせて m は偶数となる. □

シンプレクティックベクトル空間 (V, ω) には, 次の意味で正規化された基底が存在する. この基底を (V, ω) の**シンプレクティック基底**とよぶ.

補題 1.1.3　(V, ω) をシンプレクティックベクトル空間とする. このとき V の基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2n-1}, e_{2n}\}$ で, 各 $1 \leq i, j \leq n$ に対して

$$\omega(e_{2i-1}, e_{2j}) = \delta_{ij}, \quad \omega(e_{2i-1}, e_{2j-1}) = \omega(e_{2i}, e_{2j}) = 0$$

となるものが存在する．ただし，δ_{ij} は Kronecker のデルタである．

証明　シンプレクティックベクトル空間の次元に関する数学的帰納法で示す．$\dim V = 2$ のとき，0 でない任意のベクトル e_1 に対して ω が非退化であることから，あるベクトル e'_2 で $\omega(e_1, e'_2) \neq 0$ となるものが存在する．したがって $e_2 := e'_2/\omega(e_1, e'_2)$ とすると $\{e_1, e_2\}$ は (V, ω) のシンプレクティック基底となる．

次に $2k$ 次元シンプレクティックベクトル空間にはシンプレクティック基底が存在すると仮定する．$\dim V = 2(k+1)$ のとき，0 でない任意のベクトル e_1 に対して ω が非退化であることから，あるベクトル e'_2 で $\omega(e_1, e'_2) \neq 0$ となるものが存在する．ここで $e_2 := e'_2/\omega(e_1, e'_2)$ とし，

$$V' := \{v : v \in V,\ \omega(v, e_1) = \omega(v, e_2) = 0\}$$

と定めると，(V', ω) は $2k$ 次元シンプレクティックベクトル空間となり帰納法の仮定から (V', ω) のシンプレクティック基底 $\{e_3, e_4, \ldots, e_{2k+1}, e_{2k+2}\}$ が存在する．したがって $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2k+1}, e_{2k+2}\}$ は (V, ω) のシンプレクティック基底となる．

以上より任意のシンプレクティックベクトル空間にはシンプレクティック基底が存在する．$\square$

この補題より，シンプレクティック基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2n-1}, e_{2n}\}$ の双対基底を $\{e^1, e^2, \ldots, e^{2n-1}, e^{2n}\}$ とすると，ω は外積を用いて

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} e^{2i-1} \wedge e^{2i}$$

と表されることがわかり，したがって ω の n 個の外積 $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ は

$$\begin{aligned} \omega^n &= n! e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^{2n-1} \wedge e^{2n} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

となる．

定義 1.1.4　(V, ω) をシンプレクティックベクトル空間とする．V の部分空間 W の ω **補空間** W^ω を

$$W^\omega := \{v \in V : \text{任意の } w \in W \text{ に対して} \omega(v, w) = 0\}$$

と定める．$W \subset W^\omega$ となるとき W を**等方的部分空間**，$W^\omega \subset W$ となるとき W を**余等方的部分空間**，$W = W^\omega$ となるとき W を **Lagrange 部分空間**とよぶ．また $W \cap W^\omega = \{0\}$ となるとき W を**シンプレクティック部分空間**とよぶ．

ここで ω が非退化であることから, 任意の部分空間 W に対して

$$\dim W + \dim W^{\omega} = \dim V$$

が成り立つ．したがって W が等方的部分空間のとき $\dim W \leq \frac{1}{2}\dim V$, W が余等方的部分空間のとき $\dim W \geq \frac{1}{2}\dim V$, W が Lagrange 部分空間のとき $\dim W = \frac{1}{2}\dim V$ となる．また, シンプレクティック部分空間 W に対して (W, ω) は再びシンプレクティックベクトル空間となる.

以上でシンプレクティックベクトル空間の準備を終え, ここからシンプレクティック多様体の定義と簡単な例を挙げ, さらにシンプレクティック多様体の基本的な性質について解説する.

以下では特に断らない限り, 多様体 M は C^{∞} 級とする.

定義 1.1.5　M 上の 2 次微分形式 ω が次の条件を満たすとき, ω を M 上の**シンプレクティック形式**とよび, 組 (M, ω) を**シンプレクティック多様体**とよぶ.

- 各点 $p \in M$ において $\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ は非退化.
- ω は閉形式, すなわち $d\omega = 0$.

以下に基本的なシンプレクティック多様体の例を挙げる.

例 1.1.6　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{2n}$ の座標を $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ とするとき

$$\omega_{\mathbb{R}^{2n}} := \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

は $\mathbb{R}^{2n}$ 上のシンプレクティック形式となる．この $\omega_{\mathbb{R}^{2n}}$ を $\mathbb{R}^{2n}$ 上の標準的なシンプレクティック形式とよぶ．また, 商空間 $T^{2n} := \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ の局所座標をそのまま $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ と表すと, T^{2n} 上の 2 次微分形式 $\omega_{T^{2n}} := \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$ もシンプレクティック形式となる.

例 1.1.7　C^{∞} 級多様体 L に対して, T_q^*L を点 $q \in L$ における余接空間とし, L の余接束 T^*L を

$$T^*L := \{(q, p) : q \in L,\, p \in T_q^*L\}$$

と定める. また, 射影 $\pi : T^*L \to L$ を $\pi(q,p) := q$ とする. このとき, T^*L 上の 1 次微分形式 λ_{T^*L} を T^*L の点 (q,p) において

$$(\lambda_{T^*L})_{(q,p)} := \pi^* p \in T^*_{(q,p)} T^*L$$

と定めると, T^*L 上の 2 次微分形式 $\omega_{T^*L} := -d\lambda_{T^*L}$ はシンプレクティック形式となる. この λ_{T^*L} を **Liouville 形式**, ω_{T^*L} を T^*L 上の標準的なシンプレクティック形式とよぶ.

実際に, ω_{T^*L} が各点 $(q,p) \in T^*L$ において非退化であることを局所座標系を用いて確かめる. 点 $q \in L$ を含む座標近傍 $U \subset L$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合と同一視する. U の点を $x = (x_1, \ldots, x_n)$ と表し, また $y \in T^*_x U$ を $y = \sum_{i=1}^n y_i (dx_i)_x$ と表し, 点 $(x,y) \in T^*U$ と点 $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in U \times \mathbb{R}^n$ を同一視する. このとき

$$(\lambda_{T^*L})_{(x,y)} = \sum_{i=1}^n y_i (dx_i)_{(x,y)} \in T^*_{(x,y)} T^*U$$

となり, したがって, $\omega_{T^*L} = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ は $U \times \mathbb{R}^n$ の各点において非退化である.

例 1.1.8 2 次元多様体 M 上の 2 次微分形式 ω は自動的に $d\omega = 0$ となる. また, 点 $p \in M$ において ω_p が非退化であることと, $\omega_p \neq 0$ であることが同値である. したがって, 2 次元多様体 M 上の 2 次微分形式 ω がシンプレクティック形式であることと, 各点 $p \in M$ において $\omega_p \neq 0$ であることが同値である.

これらの他にもシンプレクティック多様体の重要な例として Kähler 多様体が挙げられるが, Kähler 多様体については第 2 章で解説する.

シンプレクティックベクトル空間の性質よりシンプレクティック多様体 (M, ω) の各点 $p \in M$ における接空間 T_pM は偶数次元であり, また M の次元を $2n$ とすると $\omega_p^n \neq 0$ である. これより次の補題が成り立つ.

補題 1.1.9 シンプレクティック多様体 (M, ω) は偶数次元で向き付け可能である.

また各点 $p \in M$ において $\omega_p^n \neq 0$ より, M が閉多様体ならば ω^n の表す de Rham コホモロジー類 $[\omega^n]$ は $[\omega^n] \neq 0$ となる. したがって ω の表す de Rham コホモロジー類 $[\omega]$ は $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数 k に対して $[\omega]^k \neq 0$ となり次の補題が成り立つ.

補題 1.1.10　シンプレクティック多様体 (M, ω) の次元を $2n$ とし, ω の表す de Rham コホモロジー類を $[\omega]$ とする．このとき M が閉多様体ならば, $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数 k に対して $[\omega]^k \neq 0$ となる.

この補題より, $n \geq 2$ の場合, $2n$ 次元球面 S^{2n} の 2 次の de Rham コホモロジー類は 0 になるので, S^{2n} 上にはシンプレクティック形式は存在しないことがわかる.

注意として (M, ω) が非コンパクトの場合は必ずしも $[\omega] \neq 0$ になるとは限らない．例えば余接束 T^*L の標準的なシンプレクティック形式 ω_{T^*L} は完全形式なので $[\omega_{T^*L}] = 0$ となる.

シンプレクティック多様体の局所的な構造については, 次の Darboux の定理が成り立つ．証明は §1.2 で与える.

定理 1.1.11（Darboux の定理）　$2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M, ω) の各点 $p \in M$ に対して, p のある近傍 $U \subset M$ と像への微分同相写像 $\varphi : U \to \mathbb{R}^{2n}$ で $\varphi^*\omega_{\mathbb{R}^{2n}} = \omega$ を満たすものが存在する.

一般に, Riemann 多様体は局所的に Euclid 空間の開集合と等長的になるとは限らない．一方で, Darboux の定理は任意のシンプレクティック多様体は局所的にはすべて Euclid 空間の開集合とシンプレクティック多様体として同型になるということを示している．したがってその意味において, シンプレクティック多様体には局所的な構造の違いはないといえる.

シンプレクティック多様体の大域的な構造については, 次の Moser の定理が基本である．証明は [9] などを参照.

定理 1.1.12（Moser の定理）　M を閉多様体とする．ω_t をパラメータ t に C^∞ 級に依存する M 上のシンプレクティック形式で, 各 ω_t の表す de Rham コホモロジー類が等しいとする．このとき微分同相写像 $\varphi_t : M \to M$ で $\varphi_t^*\omega_t = \omega_0$, $\varphi_0 = \mathrm{id}_M$ を満たすものが存在する．ただし $\mathrm{id}_M : M \to M$ は恒等写像とする.

閉多様体であるシンプレクティック多様体を閉シンプレクティック多様体とよぶことにする．Moser の定理より閉シンプレクティック多様体のシンプレクティック微分同相類の連続変形は, シンプレクティック形式の表す de Rham コホモロジー類により決まるといえる.

§1.2　シンプレクティック多様体の局所理論

この節では Darboux の定理（定理 1.1.11）の証明を与える.

以下では多様体 U 上の k 次微分形式全体を $\Omega^k(U)$ とし, C^∞ 級写像 $F:[0,1]\times U\to U$ に対して $f_0:U\to U$ と $f_1:U\to U$ をそれぞれ $f_0(x):=F(0,x)$, $f_1(x):=F_1(1,x)$ とする. また, 区間 $[0,1]$ の座標を t とするとき, $\zeta\in\Omega^k(U)$ に対して $F^*\zeta\in\Omega^k([0,1]\times U)$ を dt 成分を持たない $\xi\in\Omega^k([0,1]\times U)$ と $\eta\in\Omega^{k-1}([0,1]\times U)$ を用いて $F^*\zeta=\xi+dt\wedge\eta$ と表し

$$H(\zeta):=\int_0^1\eta\,dt\in\Omega^{k-1}(U)$$

と定める. このとき線形写像 $H:\Omega^k(U)\to\Omega^{k-1}(U)$ は $f_1^*\zeta-f_0^*\zeta=d(H(\zeta))+H(d\zeta)$ を満たし, さらに次の補題が成り立つ.

補題 1.2.1　U を C^∞ 級多様体, N を U の部分多様体とする. また, C^∞ 級写像 $F:[0,1]\times U\to U$ が次を満たすとする.

(1) 各 $(t,p)\in[0,1]\times N$ に対して $F(t,p)=p$.

(2) 各点 $x\in U$ に対して $F(0,x)\in N$.

(3) 各点 $x\in U$ に対して $F(1,x)=x$.

また, $\zeta\in\Omega^k(U)$ が次の条件を満たすとする.

(4) $d\zeta=0$.

(5) 各点 $p\in N$ において $\zeta_p=0$.

このとき $\zeta=d(H(\zeta))$, かつ各点 $p\in N$ において $H(\zeta)_p=0$ となる.

証明　まず, (3) より $f_1^*\zeta=\zeta$, かつ (2)(5) より $f_0^*\zeta=0$ となる. したがって, (4) と $f_1^*\zeta-f_0^*\zeta=d(H(\zeta))+H(d\zeta)$ より, $\zeta=d(H(\zeta))$ を得る. 次に, $F^*\zeta\in\Omega^k([0,1]\times U)$ を dt 成分を持たない $\xi\in\Omega^k([0,1]\times U)$ と $\eta\in\Omega^{k-1}([0,1]\times U)$ を用いて $F^*\zeta=\xi+dt\wedge\eta$ と表すと, (1) より任意の $(t,p)\in[0,1]\times N$ に対して $(F^*\zeta)_{(t,p)}$ は dt 成分を持たないので $\eta_{(t,p)}=0$ となる. したがって, 各点 $p\in N$ において

$$H(\zeta)_p=\int_0^1\eta_{(t,p)}dt=0$$

となる. $\square$

C^∞ 級多様体 M 上のベクトル場 X が生成するイソトピーを $\{\varphi_t\}$ とする. すなわち, 微分同相写像 $\varphi_t : M \to M$ は微分方程式

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = X \circ \varphi_t, \quad \varphi_0 = \mathrm{id}_M$$

により定まるものとする. ただし, id_M は M の恒等写像, $\frac{d}{dt}\varphi_t = X \circ \varphi_t$ は各点 $p \in M$ に対して $\frac{d}{dt}\varphi_t(p) = X_{\varphi_t(p)}$ を意味するものとする. このとき, X による微分形式 ζ の Lie 微分 $L_X\zeta$ を

$$L_X\zeta := \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_h^*\zeta - \zeta}{h}$$

と定める. また, X による k 次微分形式 ζ の内部積 $i_X\zeta$ を, 点 $p \in M$ における接ベクトル $u_1, \ldots, u_{k-1}$ に対して

$$(i_X\zeta)_p(u_1, \ldots, u_{k-1}) := \zeta_p(X_p, u_1, \ldots, u_{k-1})$$

と定める. このとき, Cartan の公式

$$L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$$

が成り立つ. 証明は [5] などを参照.

多様体 M 上の Riemann 計量 g を一つ固定する. M の部分多様体 N の点 $p \in N$ において, N の接空間 T_pN の直交補空間 $T_pN^\perp$ を

$$T_pN^\perp := \{u \in T_pM : \text{任意の } v \in T_pN \text{ に対して } g_p(u,v) = 0\}$$

とし, 法束 $TN^\perp$ を

$$TN^\perp := \{(p,u) : p \in N, u \in T_pN^\perp\}$$

と定める. また, 点 $p \in M$ における指数写像を $\exp_p : T_pM \to M$ とし, さらに写像 $\exp : TM \to M$ を $\exp(p,u) := \exp_p u$ と定める. ここで N がコンパクトならば, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $\exp : \{(p,u) \in TN^\perp : \sqrt{g_p(u,u)} < \varepsilon\} \to M$ は像 U_ε への微分同相写像となり, U_ε は N の管状近傍となる.

定理 1.2.2 M を C^∞ 級閉多様体, N を M のコンパクトな部分多様体とする. また, ω_0, ω_1 を N の近傍上のシンプレクティック形式で, 各点 $p \in N$ にお

いて $(\omega_0)_p = (\omega_1)_p$ とする．このとき, N のある管状近傍 $U \subset M$ と, 像への微分同相写像 $\varphi : U \to M$ で, φ の N への制限 $\varphi|_N$ が $\varphi|_N = \mathrm{id}_N$, かつ $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$ となるものが存在する.

証明　$\varepsilon > 0$ を十分小さくとり, $U_\varepsilon := \{\exp(p,u) \mid (p,u) \in TN^\perp, \sqrt{g_p(u,u)} < \varepsilon\}$ が N の管状近傍となるようにする．点 $x \in U_\varepsilon$ に対して $\exp^{-1}(x) = (p,u)$ と表すとき, C^∞ 級写像 $F : [0,1] \times U_\varepsilon \to U_\varepsilon$ を $F(t,x) := \exp_p tu$ と定めると,

- 各 $(t,p) \in [0,1] \times N$ に対して $F(t,p) = p$,
- 各点 $x \in U_\varepsilon$ に対して $F(0,x) \in N$,
- 各点 $x \in U_\varepsilon$ に対して $F(1,x) = x$

を満たす．また, $\zeta := \omega_1 - \omega_0$ とすると,

- $d\zeta = 0$,
- 各点 $p \in N$ において $\zeta_p = 0$

を満たす．したがって, 補題 1.2.1 より, $\zeta = d(H(\zeta))$, かつ各点 $p \in N$ において $H(\zeta)_p = 0$ となる.

次に, $t \in [0,1]$ に対して $\omega_t := \omega_0 + t\zeta$ とすると, 各点 $p \in N$ において $\zeta_p = 0$ となることより, $0 < \delta < \varepsilon$ が十分小さいとき ω_t は $U_\delta := \{\exp(p,u) \mid (p,u) \in TN^\perp, \sqrt{g_p(u,u)} < \delta\}$ 上で非退化であるとしてよい．また, U_δ 上のベクトル場 X_t を

$$i_{X_t}\omega_t = -H(\zeta)$$

により定めると, 各点 $p \in N$ において $H(\zeta)_p = 0$ より $(X_t)_p = 0$ となり, したがって $\frac{d}{dt}\varphi_t = X_t \circ \varphi_t$, $\varphi_0 = \mathrm{id}_{U_\delta}$ より定まるイソトピー $\{\varphi_t\}$ は, N の十分小さい管状近傍 $U \subset U_\delta$ に対して $0 \leq t \leq 1$ で $\varphi_t(U) \subset U_\delta$, かつ $\varphi_t|_N = \mathrm{id}_N$ となる. また, Cartan の公式と $\zeta = d(H(\zeta))$ より

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega_t &= \lim_{h \to 0} \frac{\varphi_{t+h}^*\omega_{t+h} - \varphi_t^*\omega_t}{h} \\
&= \varphi_t^*(L_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t) \\
&= \varphi_t^*(d(i_{X_t}\omega_t) + i_{X_t}(d\omega_t) + \frac{d}{dt}\omega_t) \\
&= \varphi_t^*(-\zeta + i_{X_t}0 + \zeta)
\end{aligned}$$

$$= \quad 0$$

となり, $\varphi_1^*\omega_1 = \omega_0$ を得る．したがって $\varphi := \varphi_1$ とすれば, U は N の管状近傍で, 像への微分同相写像 $\varphi : U \to M$ は $\varphi|_N = \mathrm{id}_N$, かつ $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$ を満たす．
$\square$

ここで特に, シンプレクティック多様体 (M,ω) の任意の点 $p \in M$ に対して $N := \{p\}$ とすれば, 次の Darboux の定理を得る．

定理 1.2.3（Darboux の定理） $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M,ω) の各点 p に対して, p のある近傍 $U \subset M$ と, 像への微分同相写像 $\varphi : U \to \mathbb{R}^{2n}$ で, $\varphi^*\omega_{\mathbb{R}^{2n}} = \omega$ となるものが存在する．

証明 点 $p \in M$ に対して, $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ を (T_pM, ω_p) のシンプレクティック基底, $\{e^1, \ldots, e^{2n}\}$ をその双対基底とする．はじめに, 点 p を含む座標近傍 (U', ψ) をとり, その局所座標を $(w_1, \ldots, w_{2n})$ とし, $e^k = \sum_{j=1}^{2n} a_{kj}(dw_j)_p$ より定数 a_{kj} を定める．次に, 新たな局所座標 $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ を $x_i := \sum_{j=1}^{2n} a_{2i-1\,j} w_j$, $y_i := \sum_{j=1}^{2n} a_{2i\,j} w_j$ により定めると, $(dx_i)_p = e^{2i-1}$, $(dy_i)_p = e^{2i}$ より $\psi^* \sum_{i=1}^{n} (dx_i)_p \wedge (dy_i)_p = \omega_p$ となる．ここで U' 上 $\omega_0 := \omega$, $\omega_1 := \psi^* \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$ とすると, 定理 1.2.2 より $N := \{p\}$ の近傍 $U \subset U'$ と, 像への微分同相写像 $\phi : U \to U'$ で $\phi(p) = p$, かつ $\phi^*\omega_1 = \omega_0$ となるものが存在する．したがって, $\varphi := \psi \circ \phi : U \to \mathbb{R}^{2n}$ とすれば $\varphi^* \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i = \omega$ となる． $\square$

§1.3 Hamilton ベクトル場

この節では Hamilton ベクトル場の定義と基本的な性質について解説する．

定義 1.3.1 $(M_1, \omega_1), (M_2, \omega_2)$ をシンプレクティック多様体とする．微分同相写像 $f : M_1 \to M_2$ が $f^*\omega_2 = \omega_1$ を満たすとき, f を**シンプレクティック微分同相写像**とよぶ．

例 1.3.2 L_1, L_2 を C^∞ 級多様体とし, $g : L_1 \to L_2$ を微分同相写像とする．このとき余接ベクトルの引き戻し $g^* : T^*L_2 \to T^*L_1$ を改めて $f : T^*L_2 \to T^*L_1$ と書くと, f は微分同相写像で $f^*\omega_{T^*L_1} = \omega_{T^*L_2}$ となり, g^* はシンプレクティック微分同相写像である．

定義より直ちにシンプレクティック微分同相写像の合成はシンプレクティック微分同相写像であることがわかる．また, シンプレクティック微分同相写像の逆写像もシンプレクティック微分同相写像である．特に, シンプレクティック

多様体 (M,ω) に対して微分同相写像 $f : M \to M$ が $f^*\omega = \omega$ を満たすとき, f を**シンプレクティック自己同型写像**とよぶ．シンプレクティック自己同型写像全体 $\mathrm{Symp}(M,\omega)$ は写像の合成に関して群となる．$\mathrm{Symp}(M,\omega)$ を (M,ω) の**シンプレクティック微分同相群**とよぶ.

シンプレクティック多様体 (M,ω) 上のベクトル場 X に対して, X による ω の内部積 $i_X\omega := \omega(X,\cdot)$ は M 上の 1 次微分形式となる．この対応は ω が M の各点で非退化であることから M 上のベクトル場と 1 次微分形式の間の 1 対 1 の対応を与える．このとき, M 上の 1 次の閉形式と完全形式に対応するベクトル場が以下で定義するシンプレクティックベクトル場と Hamilton ベクトル場である.

定義 1.3.3　シンプレクティック多様体 (M,ω) 上のベクトル場 X が $d(i_X\omega) = 0$ を満たすとき, X を**シンプレクティックベクトル場**とよぶ.

補題 1.3.4　(M,ω) をシンプレクティック多様体, $\{\varphi_t\}$ をパラメータ t に依存する M 上のベクトル場 X_t が生成するイソトピー, すなわち微分同相写像 $\varphi_t : M \to M$ は微分方程式

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = X_t \circ \varphi_t, \quad \varphi_0 = \mathrm{id}_M$$

により定まるものとする．ただし, id_M は M の恒等写像, $\frac{d}{dt}\varphi_t = X_t \circ \varphi_t$ は各点 $p \in M$ に対して $\frac{d}{dt}\varphi_t(p) = (X_t)_{\varphi_t(p)}$ を意味するものとする．このとき, 各 t に対して $\varphi_t^*\omega = \omega$ であることと, X_t がシンプレクティックベクトル場であることは同値である.

証明　ベクトル場 X による ω の Lie 微分 $L_X\omega$ の定義は

$$L_X\omega := \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_h^*\omega - \omega}{h}$$

であったので, Cartan の公式 $L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$ と $d\omega = 0$ より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega &= \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_{t+h}^*\omega - \varphi_t^*\omega}{h} \\ &= \varphi_t^* L_{X_t}\omega \\ &= \varphi_t^*(d(i_{X_t}\omega) + i_{X_t}(d\omega)) \\ &= \varphi_t^* d(i_{X_t}\omega)\end{aligned}$$

となり, したがって, 各 t に対して $\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega=0$ すなわち $\varphi_t^*\omega=\varphi_0^*\omega=\omega$ であることと, $d(i_{X_t}\omega)=0$ すなわち X_t がシンプレクティックベクトル場であることは同値である. □

定義 1.3.5　シンプレクティック多様体 (M,ω) 上の C^∞ 級関数 $H:M\to\mathbb{R}$ に対して, M 上のベクトル場 X_H が $dH=i_{X_H}\omega$ を満たすとき, X_H を H の **Hamilton ベクトル場**とよぶ. また, H を **Hamilton 関数**という.

シンプレクティック形式 ω が各点において非退化であることから, H に対して X_H が一意的に存在する. また特に, Hamilton ベクトル場はシンプレクティックベクトル場である.

例 1.3.6　$\mathbb{R}^{2n}$ 上の標準的なシンプレクティック形式 $\omega_{\mathbb{R}^{2n}}$ と $H:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ から定まる Hamilton ベクトル場 X_H は

$$X_H=\sum_{i=1}^{n}\Big\{\frac{\partial H}{\partial y_i}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)-\frac{\partial H}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)\Big\}$$

となる.

Hamilton ベクトル場 X_H が生成するイソトピー $\{\varphi_t\}$ について次の補題が成り立つ.

補題 1.3.7　各点 $p\in M$ に対して $H(\varphi_t(p))=H(p)$.

証明　Hamilton ベクトル場の定義より $dH(X_H)=\omega(X_H,X_H)=0$. したがって

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(\varphi_t(p)) &= (dH)_{\varphi_t(p)}((X_H)_{\varphi_t(p)})\\ &= 0.\end{aligned}$$

これより $H(\varphi_t(p))=H(\varphi_0(p))=H(p)$ である. □

このことから特に, H の値は X_H の積分曲線に沿って変わらないことがわかる.

以下ではさらに, Hamilton 関数がパラメータに依存する場合を考える.

定義 1.3.8　(M,ω) をシンプレクティック多様体とする. C^∞ 級関数 $H:[0,1]\times M\to\mathbb{R}$ に対して $H_t(x):=H(t,x)$ とし, X_{H_t} を H_t の Hamilton ベクト

ル場とする．このとき, 微分方程式

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = X_{H_t} \circ \varphi_t, \quad \varphi_0 = \mathrm{id}_M$$

により定まるイソトピー$\{\varphi_t\}$を$\{H_t\}$が生成する**Hamiltonイソトピー**とよぶ.

特に, 各tに対してX_{H_t}はシンプレクティックベクトル場なので, $\varphi_t^*\omega = \omega$となる.

次の補題より, Hamilton イソトピーの合成は再び Hamilton イソトピーとなる.

補題 1.3.9 $\{\varphi_t\}$を$\{H_t\}$が生成する Hamilton イソトピー, $\{\psi_t\}$を$\{G_t\}$が生成する Hamilton イソトピーとする．このとき$\{\varphi_t \circ \psi_t\}$は$\{H_t + G_t \circ \varphi_t^{-1}\}$が生成する Hamilton イソトピーとなる.

証明 $(\varphi_t^{-1})^*\omega = \omega$より, 各点$q \in M$に対して$(\varphi_t^{-1})^*\omega_{\varphi_t^{-1}(q)} = \omega_q$であることに注意すると, $u \in T_qM$に対して

$$\begin{aligned}
(d(G_t \circ \varphi_t^{-1}))_q(u) &= (dG_t)_{\varphi_t^{-1}(q)}((\varphi_t^{-1})_{*q}u) \\
&= \omega_{\varphi_t^{-1}(q)}((X_{G_t})_{\varphi_t^{-1}(q)}, (\varphi_t^{-1})_{*q}u) \\
&= (\varphi_t^{-1})^*\omega_{\varphi_t^{-1}(q)}((\varphi_{t*})_{\varphi_t^{-1}(q)}(X_{G_t})_{\varphi_t^{-1}(q)}, u) \\
&= \omega_q((\varphi_{t*})_{\varphi_t^{-1}(q)}(X_{G_t})_{\varphi_t^{-1}(q)}, u)
\end{aligned}$$

となり

$$(X_{G_t \circ \varphi_t^{-1}})_q = (\varphi_{t*})_{\varphi_t^{-1}(q)}(X_{G_t})_{\varphi_t^{-1}(q)}$$

を得る．ここで特に$q = (\varphi_t \circ \psi_t)(p)$とすると

$$(X_{G_t \circ \varphi_t^{-1}})_{(\varphi_t \circ \psi_t)(p)} = (\varphi_{t*})_{\psi_t(p)}(X_{G_t})_{\psi_t(p)}.$$

したがって

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\varphi_t \circ \psi_t)(p) &= (X_{H_t})_{(\varphi_t \circ \psi_t)(p)} + (\varphi_{t*})_{\psi_t(p)}(X_{G_t})_{\psi_t(p)} \\
&= (X_{H_t})_{(\varphi_t \circ \psi_t)(p)} + (X_{G_t \circ \varphi_t^{-1}})_{(\varphi_t \circ \psi_t)(p)} \\
&= (X_{H_t + G_t \circ \varphi_t^{-1}})_{(\varphi_t \circ \psi_t)(p)}
\end{aligned}$$

より$\{\varphi_t \circ \psi_t\}$は$\{H_t + G_t \circ \varphi_t^{-1}\}$が生成する Hamilton イソトピーとなる. □

特に, $G_t := -H_t \circ \varphi_t$ とすると $\varphi_t \circ \psi_t = \mathrm{id}_M$ となり, 次の補題を得る.

補題 1.3.10 $\{\varphi_t\}$ が Hamilton イソトピーならば, $\{\varphi_t^{-1}\}$ も Hamilton イソトピーである.

定義 1.3.11 シンプレクティック自己同型写像 φ に対して, ある Hamilton イソトピー $\{\varphi_t\}$ が存在して $\varphi = \varphi_1$ となるとき φ を **Hamilton 微分同相写像**とよぶ.

補題 1.3.10 より Hamilton 微分同相写像の合成は Hamilton 微分同相写像となり, また補題 1.3.11 より Hamilton 微分同相写像の逆写像も Hamilton 微分同相写像となる. したがって Hamilton 微分同相写像全体 $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ は $\mathrm{Symp}(M,\omega)$ の部分群となる. $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ を (M,ω) の **Hamilton 微分同相群**とよび, さらに次の補題より $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ は $\mathrm{Symp}(M,\omega)$ の正規部分群となることがわかる.

補題 1.3.12 $\{\varphi_t\}$ を $\{H_t\}$ が生成する Hamilton イソトピー, $\psi : M \to M$ をシンプレクティック微分自己同型写像とする. このとき $\{\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}\}$ は $\{H_t \circ \psi^{-1}\}$ が生成する Hamilton イソトピーとなる.

証明 $(\psi^{-1})^*\omega = \omega$ より, 各点 $p \in M$ に対して $(\psi^{-1})^*\omega_{\psi^{-1}(p)} = \omega_p$ であることに注意すると, $u \in T_pM$ に対して

$$\begin{aligned}(d(H_t \circ \psi^{-1}))_p(u) &= (dH_t)_{\psi^{-1}(p)}((\psi_*^{-1})_p u) \\ &= \omega_{\psi^{-1}(p)}((X_{H_t})_{\psi^{-1}(p)}, (\psi_*^{-1})_p u) \\ &= (\psi^{-1})^*\omega_{\psi^{-1}(p)}((\psi_*)_{\psi^{-1}(p)}(X_{H_t})_{\psi^{-1}(p)}, u) \\ &= \omega_p((\psi_*)_{\psi^{-1}(p)}(X_{H_t})_{\psi^{-1}(p)}, u)\end{aligned}$$

となり

$$(X_{H_t \circ \psi^{-1}})_p = (\psi_*)_{\psi^{-1}(p)}(X_{H_t})_{\psi^{-1}(p)}$$

を得る. したがって

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1})(p) &= (\psi_*)_{\psi^{-1}(p)}(X_{H_t})_{\psi^{-1}(p)} \\ &= (X_{H_t \circ \psi^{-1}})_p\end{aligned}$$

より $\{\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}\}$ は $\{H_t \circ \psi^{-1}\}$ が生成する Hamilton イソトピーとなる. □

§1.4 Lagrange 部分多様体

この節ではシンプレクティック多様体の重要な部分多様体である Lagrange 部分多様体の定義と基本的な例について解説する.

定義 1.4.1 (M, ω) をシンプレクティック多様体とする. M の部分多様体 L の各点 $p \in L$ において T_pL がシンプレクティックベクトル空間 (T_pM, ω_p) の Lagrange 部分空間となるとき, L を **Lagrange 部分多様体**とよぶ.

この定義は次のように言い換えることができる.

定義 1.4.2 (M, ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体とする. M の部分多様体 L が次の条件を満たすとき, L を Lagrange 部分多様体という.

- $\dim L = n$, すなわち $\lim L = \frac{1}{2} \dim M$.
- $\omega|_{TL} = 0$, すなわち各点 $p \in L$ において ω_p を T_pL に制限すると 0.

$\omega|_{TL} = 0$ という条件は包含写像 $i : L \to M$ を用いると $i^*\omega = 0$ と言い換えることができる. この観点から, n 次元多様体 L から $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M, ω) へのはめ込み $i : L \to M$ が $i^*\omega = 0$ を満たすとき, $i : L \to M$ を **Lagrange はめ込み**とよぶ.

同様に, **等方的部分多様体**, **余等方的部分多様体**, **シンプレクティック部分多様体**を定義することができる.

以下に基本的な Lagrange 部分多様体の例を挙げる.

例 1.4.3 $\mathbb{R}^{2n}$ の実部分空間 $\mathbb{R}^n := \{(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) : y_i = 0,\ 1 \leq i \leq n\}$ は $\omega_{\mathbb{R}^{2n}}$ に関して Lagrange 部分多様体である.

例 1.4.4 2 次元シンプレクティック多様体の 1 次元部分多様体は Lagrange 部分多様体である.

例 1.4.5 シンプレクティック多様体 (M, ω) に対して, 直積多様体 $M \times M$ から第 1 成分への射影を $\pi_1 : M \times M \to M$, 第 2 成分への射影を $\pi_2 : M \times M \to M$ とする. このとき, $\omega_{M \times M} := -\pi_1^*\omega + \pi_2^*\omega$ は $M \times M$ 上のシンプレクティック形式となり, 対角集合

$$\Delta := \{(p, p) : p \in M\}$$

は $(M\times M,\omega_{M\times M})$ の Lagrange 部分多様体である.

例 1.4.6 T^*L のゼロ切断 $0_{T^*L}:=\{(q,0_q):q\in L,\, 0_q:=0\in T_q^*L\}$ およびファイバー T_q^*L は ω_{T^*L} に関して Lagrange 部分多様体である. さらに L の部分多様体 $S\subset L$ に対して, S の**余法束** Λ_S を

$$\Lambda_S:=\{(q,p)\in T^*L:q\in S,\ \text{任意の}\ u\in T_qS\ \text{に対して}\ p(u)=0\}$$

と定めると, Λ_S も ω_{T^*L} に関して Lagrange 部分多様体となる.

特に $0_{T^*L}=\Lambda_L$, $T_q^*L=\Lambda_{\{q\}}$ である.

補題 1.4.7 C^∞ 級多様体 L 上の 1 次微分形式 η のグラフ $\mathrm{graph}(\eta)\subset T^*L$ を

$$\mathrm{graph}(\eta):=\{(q,\eta_q):q\in L\}$$

と定める. このとき, $\mathrm{graph}(\eta)$ が ω_{T^*L} に関して Lagrange 部分多様体であることと, $d\eta=0$ であることは同値である.

証明 局所座標を用いて示す. 点 $q\in L$ を含む座標近傍 $U\subset L$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合と同一視する. U の点を $x=(x_1,\ldots,x_n)$ と表し, また $y\in T_x^*U$ を $y=\sum_{i=1}^n y_i(dx_i)_x$ とするとき, 点 $(x,y)\in T^*U$ と点 $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)\in U\times\mathbb{R}^n$ を同一視する. このとき U 上の 1 次微分形式 $\eta:=\sum_{i=1}^n\eta_i dx_i$ のグラフ $\mathrm{graph}(\eta)\subset T^*U\cong U\times\mathbb{R}^n$ は

$$\mathrm{graph}(\eta)=\{(x_1,\ldots,x_n,\eta_1(x),\ldots,\eta_n(x)):(x_1,\ldots,x_n)\in U\}$$

と表され,

$$\xi_i:=\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_{(x,\eta_x)}+\sum_{j=1}^n\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}(x)\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)_{(x,\eta_x)},\quad 1\le i\le n$$

は $T_{(x,\eta_x)}\mathrm{graph}(\eta)$ の基底となる. すると $\omega_{T^*L}=\sum_{k=1}^n dx_k\wedge dy_k$ より

$$(\omega_{T^*L})_{(x,\eta(x))}(\xi_i,\xi_j)=\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}-\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}$$

となる. したがって $\mathrm{graph}(\eta)$ が ω_{T^*L} に関して Lagrange 部分多様体であることと, 各 $1\le i,j\le n$ に対して $\partial\eta_i/\partial x_j=\partial\eta_j/\partial x_i$ すなわち $d\eta=0$ であることは同値である. □

$\varphi : M \to M$ をシンプレクティック自己同型写像とすると $\varphi^*\omega = \omega$ より, M の Lagrange 部分多様体 L の φ による像 $\varphi(L)$ は再び Lagrange 部分多様体となる. この観点から, $d\eta = 0$ のとき $\mathrm{graph}(\eta)$ が Lagrange 部分多様体となることを示すこともできる. $\pi : T^*L \to L$ を射影とし, L 上の 1 次微分形式 $\eta := \sum_{i=1}^n \eta_i dx_i$ に対して $\pi^*\eta$ は T^*L 上の 1 次微分形式となる. このとき, T^*L 上のベクトル場 X を $\pi^*\eta = i_X \omega_{T^*L}$ により定めると, X は局所座標を用いて

$$X = -\sum_{i=1}^n \eta_i \Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)$$

となり, $-X$ が生成するイソトピーを $\{\varphi_t\}$ とすると $\varphi_1(0_{T^*L}) = \mathrm{graph}(\eta)$ となる. したがって, $d\eta = 0$ のとき φ_1 はシンプレクティック自己同型写像であり, 0_{T^*L} は Lagrange 部分多様体であるので $\mathrm{graph}(\eta)$ は Lagrange 部分多様体となる. 特に L 上の C^∞ 級関数 $f : L \to \mathbb{R}$ により $\eta = df$ となっている場合, $\{\varphi_t\}$ は $\pi^*f : T^*L \to \mathbb{R}$ を Hamilton 関数とする Hamilton イソトピーとなるので, $\mathrm{graph}(df)$ は 0_{T^*L} の Hamilton 微分同相写像による像となる.

(V, ω) をシンプレクティックベクトル空間, g を V 上の内積とする. ω と g の非退化性から, $u \in V$ に対して $g(u, \cdot) = \omega(f(u), \cdot)$ により $f(u) \in V$ を対応させる線型写像 $f : V \to V$ は同型写像となる. ここで $W \subset V$ を Lagrange 部分空間, $W^\perp$ を W の直交補空間, すなわち

$$W^\perp := \{v : 任意の\ w \in W\ に対して\ g(v, w) = 0\}$$

とすると, $u \in W^\perp$ ならば $f(u) \in W$ であることがわかる. したがって, 線型写像 $f : W^\perp \to W$ は同型写像で, さらに $u \in W^\perp$ に対して W の双対空間 W^* の元 $g(f(u), \cdot) \in W^*$ を対応させる線型写像も $W^\perp$ から W^* への同型写像となる.

次に, L をシンプレクティック多様体 (M, ω) の Lagrange 部分多様体とし, g を M 上の Riemann 計量とする. このとき, 点 $p \in L$ おいて $u \in T_pL^\perp$ に対して $g_p(u, \cdot) = \omega_p(f_p(u), \cdot)$ により $f_p(u) \in T_pL$ を対応させるベクトル束の同型写像を $f : TL^\perp \to TL$ とし, さらに, $u \in T_pL^\perp$ に対して $g_p(f_p(u), \cdot) \in T_p^*L$ を対応させるベクトル束の同型写像を $\chi : TL^\perp \to T^*L$ とする. また, 点 $p \in M$ における指数写像を $\exp_p : T_pM \to M$ とし, 写像 $\exp : TM \to M$ を $\exp(p, u) := \exp_p u$ と定め, さらに $\exp$ の $TL^\perp$ への制限を $\exp|_{TL^\perp}$ とする. ここで, $\varepsilon > 0$ に対して

$$U_\varepsilon(0_{TL^\perp}) := \{(p, u) : p \in L, u \in T_pL^\perp, \sqrt{g_p(u, u)} < \varepsilon\}$$

と定めると, L がコンパクトならば, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, 写像 $\exp|_{TL^\perp} : U_\varepsilon(0_{TL^\perp}) \to M$ は像 U_ε への微分同相写像となり, U_ε は L の管状近傍となる. したがって, 写像 $\chi \circ (\exp|_{TL^\perp})^{-1} : U_\varepsilon \to T^*L$ は L の管状近傍 U_ε から T^*L のゼロ切断の管状近傍への微分同相写像となる.

特にこのことから, L の自己交点数は T^*L のゼロ切断の自己交点数, すなわち L の Euler 数に一致することがわかる. 例えば, $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\mathbb{R}^{2n}})$ のコンパクトな Lagrange 部分多様体 L の自己交点数は 0 なので, L の Euler 数は 0 となる.

さらに, Lagrange 部分多様体 L の管状近傍のシンプレクティック構造は T^*L のゼロ切断の管状近傍のシンプレクティック構造と同型であることがいえる. 証明は §1.5 で与える.

定理 1.4.8（Lagrange 管状近傍定理）　シンプレクティック多様体 (M, ω) のコンパクトな Lagrange 部分多様体 L に対して, L の管状近傍 $U \subset M$ と像への微分同相写像 $\varphi : U \to T^*L$ で $\varphi(L) = 0_{T^*L}$ かつ $\varphi^*\omega_{T^*L} = \omega$ となるものが存在する.

定理 1.4.8 と補題 1.4.7 の後の注意より Lagrange 部分多様体 L の無限小変形は L の閉 1 次形式により決まるといえ, さらに Hamilton 微分同相写像で移り合う Lagrange 部分多様体を同値とすると, Lagrange 部分多様体 L の同値類の無限小変形は L の 1 次の de Rham コホモロジー類により決まるといえる.

§1.5　Lagrange 管状近傍定理

この節では Lagrange 管状近傍定理（定理 1.4.8）の証明を与える. まずは線形代数の準備からはじめる.

命題 1.5.1　V を $2n$ 次元ベクトル空間, $\omega_0, \omega_1 : V \times V \to \mathbb{R}$ をシンプレクティック形式, すなわち V 上の非退化な交代形式とする. また, n 次元部分空間 $W \subset V$ は ω_0 と ω_1 の両方に関して Lagrange 部分空間とする. このとき, 線形同型写像 $f : V \to V$ で

(1) 任意の $u \in W$ に対して $f(u) = u$,

(2) 任意の $u, v \in V$ に対して $\omega_0(u, v) = \omega_1(f(u), f(v))$

を満たすものが存在する. さらに, この条件 (1)(2) を満たす V から V への線形同型写像 $f_1, \ldots, f_N$ と, $\sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha = 1, \lambda_\alpha > 0$ を満たす実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ に対して, $f := \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha f_\alpha : V \to V$ は線形同型写像で再び条件 (1)(2) を満たす.

証明　V の部分空間 W' を $V = W \oplus W'$ となるように取り，$e_1, \dots, e_n$ を W の基底, $e_{n+1}, \dots, e_{2n}$ を W' の基底とする．このとき ω_0 は, ある n 次正則行列 A_0 と ${}^tB_0 = -B_0$ を満たす n 次正方行列 B_0 を用いて, $u = \sum_{i=1}^{2n} u_i e_i, v = \sum_{j=1}^{2n} v_j e_j \in V$ に対して

$$\omega_0(u,v) = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_0 \\ -{}^tA_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2n} \end{bmatrix}$$

と表され, 同様に ω_1 についてもある n 次正則行列 A_1 と ${}^tB_1 = -B_1$ を満たす n 次正方行列 B_1 を用いて,

$$\omega_1(u,v) = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ -{}^tA_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2n} \end{bmatrix}$$

と表される．次に E を n 次単位行列とし, 線型写像 $f : V \to V$ を $u = \sum_{i=1}^{2n} u_i e_i$ に対して

$$f(u) := \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{2n} \end{bmatrix}$$

とすると, f は条件 (1) を満たし, 条件 (2) は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & A_0 \\ -{}^tA_0 & B_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} E & 0 \\ {}^tF & {}^tH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ -{}^tA_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ 0 & H \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & A_1 H \\ -{}^tH{}^tA_1 & -{}^tH{}^tA_1F + {}^tFA_1H + {}^tHB_1H \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と同値である．特にこれより $H = A_1^{-1}A_0$ となり, H は正則行列なので f は同型写像となる．さらに,

$$F := \frac{1}{2}({}^tA_0^{-1}{}^tB_0 + {}^tA_1^{-1}{}^tB_1A_1^{-1}A_0)$$

は $B_0 = -{}^tH{}^tA_1F + {}^tFA_1H + {}^tHB_1H$ を満たし, したがって, 条件 (1)(2) を満たす線形同型写像 $f : V \to V$ が存在する．

次に, 線形同型写像 $f_\alpha, f_\beta : V \to V$ を $u = \sum_{i=1}^{2n} u_i e_i$ に対して

$$
\begin{aligned}
f_\alpha(u) &:= \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F_\alpha \\ 0 & H_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{2n} \end{bmatrix}, \\
f_\beta(u) &:= \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F_\beta \\ 0 & H_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{2n} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

と表し, f_α と f_β は両方とも条件 (2) を満たすとする. このとき, $H_\alpha = H_\beta = A_1^{-1} A_0$ であり, さらに

$$
\begin{aligned}
B_0 &= -{}^t H_\beta {}^t A_1 F_\beta + {}^t F_\beta A_1 H_\beta + {}^t H_\beta B_1 H_\beta, \\
B_0 &= -{}^t H_\alpha {}^t A_1 F_\alpha + {}^t F_\alpha A_1 H_\alpha + {}^t H_\alpha B_1 H_\alpha
\end{aligned}
$$

の辺々差をとって整理すると

$$
0 = -{}^t A_0 (F_\beta - F_\alpha) + {}^t (F_\beta - F_\alpha) A_0
$$

となる. したがって, $C := {}^t A_0 (F_\beta - F_\alpha)$ とおくと ${}^t C = C$ であり, $F_\beta = F_\alpha + {}^t A_0^{-1} C$ と表すことができる. また逆に, ${}^t C = C$ となる n 次正方行列 C に対して $F_\beta := F_\alpha + {}^t A_0^{-1} C$, $H_\beta := A_1^{-1} A_0$ とおくと, f_α が条件 (1)(2) を満たすとき f_β も条件 (1)(2) を満たす.

仮定の各 f_α に対応する行列を F_α, H_α とすると, $H_\alpha = A_1^{-1} A_0$ であり, また ${}^t C_\alpha = C_\alpha$ となる n 次正方行列 C_α が存在して $F_\alpha = F_1 + {}^t A_0^{-1} C_\alpha$ と表すことができる. したがって, $f := \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha f_\alpha$ に対応する行列 F, H は

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha H_\alpha = A_1^{-1} A_0, \\
F &= \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha F_\alpha = F_1 + {}^t A_0^{-1} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha C_\alpha
\end{aligned}
$$

となるが, $C := \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha C_\alpha$ も ${}^t C = C$ を満たすので, f は条件 (1)(2) を満たす. □

ここで, 1.4 節で与えたベクトル束の同型写像 $\chi : TL^\perp \to T^* L$ を用意し, 以下の定理を証明する.

定理 1.5.2（Lagrange 管状近傍定理）　シンプレクティック多様体 (M,ω) のコンパクトな Lagrange 部分多様体 L に対して, L の管状近傍 $U\subset M$ と像への微分同相写像 $\varphi: U\to T^*L$ で $\varphi(L)=0_{T^*L}$ かつ $\varphi^*\omega_{T^*L}=\omega$ となるものが存在する.

証明　ベクトル束の同型写像 $\chi: TL^\perp \to T^*L$ を全空間の間の微分同相写像と見なすと, $\chi^*\omega_{T^*L}$ は全空間 $TL^\perp$ 上のシンプレクティック形式であり, また, 指数写像の制限 $\exp|_{TL^\perp}: TL^\perp\to M$ による ω 引き戻し $\exp|_{TL^\perp}^*\omega$ も全空間 $TL^\perp$ 上のシンプレクティック形式である. そして, $TL^\perp$ のゼロ切断 $0_{TL^\perp}$ は $\chi^*\omega_{T^*L}$ と $\exp|_{TL^\perp}^*\omega$ の両方に関して Lagrange 部分多様体となる. ここで, $T_{(p,0)}TL^\perp = T_pL\oplus T_pL^\perp$ であることに注意する.

$\{U_\alpha\}$ を各 $TL|_{U_\alpha}$ が自明束になる L の開被覆とする. まず, 命題 1.5.1 より, ベクトル束の同型写像 $f_\alpha: (TL\oplus TL^\perp)|_{U_\alpha}\to (TL\oplus TL^\perp)|_{U_\alpha}$ を, 各点 $p\in U_\alpha$ において,

- 任意の $u\in T_pL$ に対して $(f_\alpha)_p(u)=u$,
- 任意の $u,v\in T_pL\oplus T_pL^\perp$ に対して
$$(\exp|_{TL^\perp}^*\omega)_{(p,0)}(u,v) = (\chi^*\omega_{T^*L})_{(p,0)}((f_\alpha)_p(u),(f_\alpha)_p(v))$$

を満たすようにとる. ここで, $\{\lambda_\alpha\}$ を $\{U_\alpha\}$ に付随する 1 の分割とし, ベクトル束の同型写像 $f: TL\oplus TL^\perp\to TL\oplus TL^\perp$ を $f:=\sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha$ と定めると, 再び命題 1.5.1 より,

- 任意の $u\in T_pL$ に対して $f_p(u)=u$,
- 任意の $u,v\in T_pL\oplus T_pL^\perp$ に対して
$$(\exp|_{TL^\perp}^*\omega)_{(p,0)}(u,v) = (\chi^*\omega_{T^*L})_{(p,0)}(f_p(u),f_p(v))$$

が成り立つ.

次に, 写像 $\exp|_{TL^\perp}^{-1}\circ\exp\circ f: TL^\perp\to TL^\perp$ の点 $(p,0)\in TL^\perp$ における微分は
$$(\exp|_{TL^\perp}^{-1}\circ\exp\circ f)_{*(p,0)} = f_p : T_pL\oplus T_pL^\perp \to T_pL\oplus TL^\perp$$
で, 同型写像となる. したがって, $\varepsilon>0$ に対して
$$U_\varepsilon(0_{TL^\perp}) := \{(p,u): p\in L, u\in T_pL^\perp, \sqrt{g_p(u,u)}<\varepsilon\}$$

と定めると, L がコンパクトならば十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, 写像 $\exp|_{TL^\perp}^{-1} \circ \exp \circ f : U_\varepsilon(0_{TL^\perp}) \to TL^\perp$ は像への微分同相写像となる. したがって, $U_\varepsilon(0_{TL^\perp})$ 上のシンプレクティック形式 ω' を

$$\omega' := (\exp|_{TL^\perp}^{-1} \circ \exp \circ f)^* \chi^* \omega_{T^*L}$$

と定めと, 任意の $u, v \in T_pL \oplus T_pL^\perp$ に対して

$$\begin{aligned}
& (\exp|_{TL^\perp}^* \omega)_{(p,0)}(u, v) \\
= \; & (\chi^* \omega_{T^*L})_{(p,0)}(f_p(u), f_p(v)) \\
= \; & (\chi^* \omega_{T^*L})_{(p,0)}((\exp|_{TL^\perp}^{-1} \circ \exp \circ f)_{*(p,0)}(u), (\exp|_{TL^\perp}^{-1} \circ \exp \circ f)_{*(p,0)}(v)) \\
= \; & \omega'(u, v)
\end{aligned}$$

となる. したがって, 必要であれば $\varepsilon > 0$ を小さくとることにより, 写像 $\exp|_{TL^\perp} : U_\varepsilon(0_{TL^\perp}) \to M$ は像 U_ε への微分同相写像とし, $U_\varepsilon \subset M$ 上のシンプレクティック形式 ω_0, ω_1 を $\omega_0 := \omega, \omega_1 := (\exp|_{TL^\perp}^{-1})^* \omega'$ とすると, 各点 $p \in L$ において $(\omega_0)_p = (\omega_1)_p$ となる. よって, 定理 1.2.2 より, L のある管状近傍 $U \subset M$ と, 像への微分同相写像 $\phi : U \to M$ で, $\varphi|_L = \mathrm{id}_L$, かつ $\phi^* \omega_1 = \omega_0$ となるものが存在する. そこで, 像への微分同相写像 $\varphi : U \to T^*L$ を

$$\varphi := \chi \circ \exp|_{TL^\perp}^{-1} \exp \circ f \circ \exp|_{TL^\perp}^{-1} \circ \phi$$

とすれば, U 上で $\varphi^* \omega_{T^*L} = \omega$ となる. □

第 2 章　Kähler 多様体

§2.1　Kähler 多様体

Kähler 多様体はもともと複素幾何や射影幾何を起源に持つ複素多様体であるが, Kähler 多様体はシンプレクティック多様体でもありシンプレクティック幾何においてもとても重要である. この節では Kähler 多様体の定義を解説する.

Hausdorff 空間 M の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と像への同相写像 $\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{C}^n$ で, 各 $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して $\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1} : \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ が正則写像となるとき, 組 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ を**複素座標近傍**, $\varphi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{C}^n$ の座標を**局所複素座標**, $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を**複素座標近傍系**とよび, 組 $(M, \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda})$ を**複素 n 次元**の**複素多様体**とよぶ.

複素多様体 M の点 $p \in M$ を含む複素座標近傍の局所複素座標を $(z_1, \dots, z_n)$ とし, 各 z_i の実部を x_i, 虚部を y_i, すなわち $z_i := x_i + \sqrt{-1}y_i$ とするとき $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ は点 $p \in M$ を含む座標近傍の局所座標となり, M は $2n$ 次元の C^∞ 級多様体である.

以下この節では特に断らない限り, M は複素多様体とする.

定義 2.1.1　点 $p \in M$ において, 実線形写像 $J_p : T_pM \to T_pM$ を

$$J_p\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p := \Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_p, \quad J_p\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_p := -\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p$$

により定める. $J := \{J_p\}_{p\in M}$ を複素多様体 M 上の**複素構造**とよぶ.

複素構造の定義は局所複素座標の選び方に依らない. 実際に, $(z_1^\lambda, \dots, z_n^\lambda)$ と $(z_1^\mu, \dots, z_n^\mu)$ を点 $p \in M$ を含む複素座標近傍の局所複素座標とし, それぞれの局所複素座標から定まる複素構造を J_p^λ, J_p^μ とする. また, 局所複素座標を実部と虚部を用いてそれぞれ $z_i^\lambda = x_i^\lambda + \sqrt{-1}y_i^\lambda, z_j^\mu = x_j^\mu + \sqrt{-1}y_j^\mu$ と表すとき, 座標変換が正則であることから Cauhy–Riemann 方程式

$$\frac{\partial x_i^\lambda}{\partial x_j^\mu} = \frac{\partial y_i^\lambda}{\partial y_j^\mu}, \quad \frac{\partial x_i^\lambda}{\partial y_j^\mu} = -\frac{\partial y_i^\lambda}{\partial x_j^\mu}$$

が成り立つ. したがって

$$J_p^\lambda\Big(\frac{\partial}{\partial x_j^\mu}\Big)_p \;=\; J_p^\lambda\Big\{\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i^\lambda}{\partial x_j^\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i^\lambda}\Big)_p + \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_i^\lambda}{\partial x_j^\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial y_i^\lambda}\Big)_p\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i^\lambda}{\partial y_j^\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial y_i^\lambda}\Big)_p + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^\lambda}{\partial y_j^\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i^\lambda}\Big)_p \\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial y_j^\mu}\Big)_p, \\
J_p^\lambda\Big(\frac{\partial}{\partial y_j^\mu}\Big)_p &= J_p^\lambda\Big\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^\lambda}{\partial y_j^\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i^\lambda}\Big)_p + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i^\lambda}{\partial y_j^\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial y_i^\lambda}\Big)_p \Big\} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i^\lambda}{\partial x_j^\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial y_i^\lambda}\Big)_p - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^\lambda}{\partial x_j^\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i^\lambda}\Big)_p \\
&= -\Big(\frac{\partial}{\partial x_j^\mu}\Big)_p
\end{aligned}
$$

となり, $J_p^\lambda = J_p^\mu$ である.

また, T_pM の恒等写像を id_{T_pM} とすると, 定義より $J_p^2 = -\mathrm{id}_{T_pM}$ である.

定義 2.1.2 複素多様体 M 上の Riemann 計量 g が各点 $p \in M$ と $u, v \in T_pM$ に対して

$$g_p(u, v) = g_p(J_pu, J_pv)$$

を満たすとき, g を **Hermite 計量**, 組 (M, g) を **Hermite 多様体**とよぶ.

$\mathbb{C}^n$ 上の標準的な Riemann 計量 $\sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i + \sum_{i=1}^n dy_i \otimes dy_i$ は Hermite 計量である. また任意の複素多様体 M とその複素座標近傍系 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に従属する 1 の分割, g_λ を $\varphi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{C}^n$ 上の標準的な Hermite 計量とすると, $g := \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda g_\lambda$ は M 上の Hermite 計量である.

定義 2.1.3 (M, g) を Hermite 多様体, J を M 上の複素構造とする. 点 $p \in M$ において交代形式 $\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ を, $u, v \in T_pM$ に対して

$$\omega_p(u, v) := g_p(J_pu, v)$$

と定めると, $\omega = \{\omega_p\}_{p\in M}$ は M 上の非退化な 2 次微分形式となる. ω を (M, g) の**基本 2 次微分形式**とよぶ.

実際に, $u, v \in T_pM$ に対して $\omega_p(u, v) = g_p(J_pu, v) = g_p(J_p^2u, J_pv) = g_p(-u, J_pv) = -g_p(J_pv, u) = -\omega_p(v, u)$ となり, ω_p は交代形式である. また, $u \in T_pM$ が, 任意の $v \in T_pM$ に対して $\omega_p(u, v) = 0$ ならば, 特に $v = J_pu$ として $\omega_p(u, J_pu) = g_p(J_pu, J_pu) = g_p(u, u) = 0$ で $u = 0$ となり, ω_p は非退化である.

さらに, $u, v \in T_pM$ に対して $\omega_p(J_pu, J_pv) = g_p(J_p^2u, J_pv) = g_p(-u, J_pv) = -g_p(J_pv, u) = -\omega_p(v, u) = \omega_p(u, v)$ より

$$\omega_p(J_pu, J_pv) = \omega_p(u, v)$$

が成り立つ.

定義 2.1.4　Hermite 多様体 (M, g) の基本 2 次微分形式 ω が $d\omega = 0$ を満たすとき, g を **Kähler 計量**, ω を **Kähler 形式**, 組 (M, g) または (M, ω) を **Kähler 多様体**とよぶ.

定義より Kähler 形式はシンプレクティック形式である. Kähler 多様体の例は § 2.3 で解説する.

M を複素多様体, N を M の C^∞ 級部分多様体とする. ある自然数 m と各点 $p \in N$ に対して, p を含む M のある複素座標近傍 (U_p, φ_p) が存在して

$$\varphi_p(N \cap U_p) = \{(z_1, \ldots, z_m, 0, \ldots, 0) \in \varphi_p(U_p)\}$$

となるとき, N を複素 m 次元の**複素部分多様体**という. 特に, N は複素座標近傍系 $\{(N \cap U_p, \varphi_p|_{N \cap U_p})\}_{p \in N}$ により複素多様体である.

複素部分多様体の例を構成する際には次の陰関数の定理が有効である. 証明は [1] などを参照.

定理 2.1.5　$\mathbb{C}^n$ の座標を $(z_1, \ldots, z_n)$ とし, $0 \leq m \leq n$ とする. また, $\mathbb{C}^n$ の開集合 U 上で定義された正則関数 $f_i : U \to \mathbb{C}$, $i = m+1, \ldots, n$, に対して $N := \{p \in U : f_i(p) = 0, i = m+1, \ldots, n\}$ とする. このとき, 各点 $p \in N$ において $(n-m, n)$ 行列

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_{m+1}}{\partial z_1}(p) & \cdots & \dfrac{\partial f_{m+1}}{\partial z_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial z_1}(p) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_n}(p) \end{bmatrix}$$

の階数が $n - m$ ならば, N は U における複素 m 次元の複素部分多様体である.

例 2.1.6　定数 a, b は $16a^3 + 27b^2 \neq 0$ を満たすとする. このとき,

$$N := \{(z_1, z_2) : z_2^2 = z_1^3 + az_1 + b\}$$

は $\mathbb{C}^2$ の複素部分多様体である．実際 $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ を $f(z_1,z_2):=z_2^2-z_1^3-az_1-b$ とすれば, 陰関数の定理より $N=f^{-1}(0)$ は複素 1 次元の複素部分多様体となる.

補題 2.1.7　Kähler 多様体の複素部分多様体は Kähler 多様体である.

証明　複素多様体 M 上の複素構造 J の部分多様体 N への制限 $J_N:=\{J_p|_{T_pN}\}_{p\in N}$ は N 上の複素構造と一致し, また M 上の Hermite 計量 g の N への制限 g_N は N 上の Hermite 計量となる．さらに (N,g_N) の基本 2 次微分形式 ω_N は (M,g) の基本 2 次微分形式 ω の N への制限に一致するので, $d\omega=0$ ならば $d\omega_N=0$ で (N,ω_N) は Kähler 多様体となる. □

補題 2.1.7 より, Kähler 多様体の複素部分多様体として, Kähler 多様体の例を多く作ることができる.

§2.2　複素多様体上の微分形式

この節では複素多様体上の接ベクトルおよび微分形式について解説する.

複素 n 次元の複素多様体 M の複素座標近傍 U の局所複素座標を $(z_1,\dots,z_n)$ とし, 各 z_i の実部を x_i, 虚部を y_i, すなわち $z_i:=x_i+\sqrt{-1}y_i$ とする.

定義 2.2.1　C^∞ 級関数 $f:U\to\mathbb{C}$ に対して,

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}:=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}-\sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y_i}\Big),\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}:=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y_i}\Big)$$

と定める.

このとき, C^∞ 級関数 $f:U\to\mathbb{C}$ が正則関数であること, すなわち f の実部と虚部が各 x_i,y_i に対して Cauchy–Riemann 方程式を満たすことと, 各 z_i に対して

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}=0$$

が成り立つことは同値である.

次に, 点 $p\in M$ において接空間 T_pM の複素化を $T_pM\otimes\mathbb{C}$ とする．すなわち, 点 $p\in M$ を含む複素座標近傍の局所複素座標を $(z_1,\dots,z_n)$, $z_i=x_i+\sqrt{-1}y_i$ とするとき

$$T_pM\otimes\mathbb{C}:=\Big\{\sum_{i=1}^n\alpha_i\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p+\sum_{i=1}^n\beta_i\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_p:\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{C}\Big\}$$

と定める. $T_pM\otimes\mathbb{C}$ の複素次元は $2n$, 実次元は $4n$ である.

定義 2.2.2 点 $p\in M$ において $\Bigl(\dfrac{\partial}{\partial z_i}\Bigr)_p, \Bigl(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\Bigr)_p \in T_pM\otimes\mathbb{C}$ を

$$\Bigl(\frac{\partial}{\partial z_i}\Bigr)_p := \frac{1}{2}\Bigl\{\Bigl(\frac{\partial}{\partial x_i}\Bigr)_p - \sqrt{-1}\Bigl(\frac{\partial}{\partial y_i}\Bigr)_p\Bigr\}, \quad \Bigl(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\Bigr)_p := \frac{1}{2}\Bigl\{\Bigl(\frac{\partial}{\partial x_i}\Bigr)_p + \sqrt{-1}\Bigl(\frac{\partial}{\partial y_i}\Bigr)_p\Bigr\}$$

と定める.

このとき, $\Bigl(\dfrac{\partial}{\partial z_1}\Bigr)_p, \dots, \Bigl(\dfrac{\partial}{\partial z_n}\Bigr)_p, \Bigl(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\Bigr)_p, \dots, \Bigl(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\Bigr)_p$ は $T_pM\otimes\mathbb{C}$ の複素ベクトル空間としての基底となる. また, $(z_1^\lambda,\dots,z_n^\lambda), (z_1^\mu,\dots,z_n^\mu)$ をそれぞれ局所複素座標とすると座標変換が正則であることから

$$\Bigl(\frac{\partial}{\partial z_i^\lambda}\Bigr) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_j^\mu}{\partial z_i^\lambda}\Bigl(\frac{\partial}{\partial z_j^\mu}\Bigr), \quad \Bigl(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i^\lambda}\Bigr) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{z}_j^\mu}{\partial \bar{z}_i^\lambda}\Bigl(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j^\mu}\Bigr)$$

が成り立つ. したがって, $T_p'M$ を $\Bigl(\dfrac{\partial}{\partial z_1}\Bigr)_p, \dots, \Bigl(\dfrac{\partial}{\partial z_n}\Bigr)_p$ で張られる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間, $T_p''M$ を $\Bigl(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\Bigr)_p, \dots, \Bigl(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\Bigr)_p$ で張られる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とすると, $T_p'M, T_p''M$ は局所複素座標の選び方によらず $T_pM\otimes\mathbb{C}$ の部分空間となり, 直和分解 $T_pM\otimes\mathbb{C} = T_p'M\oplus T_p''M$ が成り立つ.

また, 複素構造 $J_p : T_pM\to T_pM$ を複素線形写像 $J_p : T_pM\otimes\mathbb{C}\to T_pM\otimes\mathbb{C}$ に拡張すると

$$J_p\Bigl(\frac{\partial}{\partial z_i}\Bigr)_p = \sqrt{-1}\Bigl(\frac{\partial}{\partial z_i}\Bigr)_p, \quad J_p\Bigl(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\Bigr)_p = -\sqrt{-1}\Bigl(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\Bigr)_p$$

が成り立つ. すなわち, $T_p'M$ は J_p の固有値 $\sqrt{-1}$ の固有空間, $T_p''M$ は J_p の固有値 $-\sqrt{-1}$ の固有空間である.

次に, $T_p^*M\otimes\mathbb{C}$ を T_p^*M の複素化とする. すなわち, 点 $p\in M$ を含む複素座標近傍の局所複素座標を $(z_1,\dots,z_n)$, $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ とするとき

$$T_p^*M\otimes\mathbb{C} := \Bigl\{\sum_{i=1}^n \alpha_i(dx_i)_p + \sum_{i=1}^n \beta_i(dy_i)_p : \alpha_i, \beta_i\in\mathbb{C}\Bigr\}$$

と定める. $T_p^*M\otimes\mathbb{C}$ の複素次元は $2n$, 実次元は $4n$ である.

定義 2.2.3 点 $p \in M$ において $(dz_i)_p, (d\bar{z}_i)_p \in T_p^*M \otimes \mathbb{C}$ を

$$(dz_i)_p := (dx_i)_p + \sqrt{-1}(dy_i)_p, \quad (d\bar{z}_i)_p := (dx_i)_p - \sqrt{-1}(dy_i)_p$$

と定める.

このとき, $(dz_1)_p, \ldots, (dz_n)_p, (d\bar{z}_1)_p, \ldots, (d\bar{z}_n)_p$ は $T_p^*M \otimes \mathbb{C}$ の複素ベクトル空間としての基底となり, さらに $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right)_p$ の双対基底となっている. また, $(z_1^\lambda, \ldots, z_n^\lambda), (z_1^\mu, \ldots, z_n^\mu)$ をそれぞれ局所複素座標とすると座標変換が正則であることから

$$(dz_i^\lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_i^\lambda}{\partial z_j^\mu}(dz_j^\mu), \quad (d\bar{z}_i^\lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{z}_i^\lambda}{\partial \bar{z}_j^\mu}(d\bar{z}_j^\mu)$$

が成り立つ. したがって, ${T^*}'_pM$ を $(dz_1)_p, \ldots, (dz_n)_p$ で張られる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間, ${T^*}''_pM$ を $(d\bar{z}_1)_p, \ldots, (d\bar{z}_n)_p$ で張られる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とすると, ${T^*}'_pM, {T^*}''_pM$ は複素座標の選び方によらず $T_p^*M \otimes \mathbb{C}$ の部分空間となる.

また, 直和分解 $T_p^*M \otimes \mathbb{C} = {T^*}'_pM \oplus {T^*}''_pM$ に伴い, 外積空間 $\bigwedge^k T_p^*M \otimes \mathbb{C}$ も

$$\bigwedge^k T_p^*M \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \left(\bigwedge^p {T^*}'_pM \wedge \bigwedge^q {T^*}''_pM\right)$$

と直和に分解する. M 上の複素化した微分形式 $\eta = \{\eta_p\}_{p \in M}$ が $\eta_p \in \bigwedge^p {T^*}'_pM \wedge \bigwedge^q {T^*}''_pM$ となるとき, η を M 上の (p,q) **次微分形式**とよぶ. また, M 上の (p,q) 次微分形式全体を $\Omega^{p,q}(M)$ と書く. $\eta \in \Omega^{p,q}(M)$ ならば η の複素共役 $\bar{\eta}$ は $\bar{\eta} \in \Omega^{q,p}(M)$ である.

補題 2.2.4 Hermite 多様体 M の基本 2 次微分形式 ω は $(1,1)$ 次微分形式である.

証明 各点 $p \in M$ において $\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ を複素双線形写像 $\omega_p : T_pM \otimes \mathbb{C} \times T_pM \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に拡張すると

$$\begin{aligned} \omega_p(\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)_p) &= \omega_p(J_p\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)_p, J_p\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)_p) \\ &= \omega_p(\sqrt{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)_p, \sqrt{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)_p) \end{aligned}$$

$$= \quad -\omega_p(\Big(\frac{\partial}{\partial z_i}\Big)_p, \Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)_p)$$

となり, これより $\omega_p(\Big(\frac{\partial}{\partial z_i}\Big)_p, \Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)_p) = 0$ である. 同様に, $\omega_p(\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\Big)_p, \Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\Big)_p) = 0$. したがって, ω_p は $T^{*\prime}_pM \wedge T^{*\prime\prime}_pM$ 成分だけが残り $\omega \in \Omega^{1,1}(M)$ である. □

複素座標近傍 U の局所複素座標を $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ とするとき, C^∞ 級関数 $f : U \to \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}
df &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i}dy_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial f}{\partial z_i} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}\Big)(dz_i + d\bar{z}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial f}{\partial z_i} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}\Big)(dz_i - d\bar{z}_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i}dz_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}d\bar{z}_i
\end{aligned}$$

である. したがって, $\eta \in \Omega^{p,q}(M)$ に対して $d\eta \in \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M)$ となる.

定義 2.2.5 $\eta \in \Omega^{p,q}(M)$ に対して $d\eta$ の $\Omega^{p+1,q}(M)$ 成分を $\partial\eta$, $\Omega^{p,q+1}(M)$ 成分を $\bar{\partial}\eta$ と定める.

このとき, $dd\eta = 0$ より

$$\partial\partial = 0, \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0, \quad \bar{\partial}\bar{\partial} = 0$$

が成り立つ. また, 複素共役を取ることにより

$$\overline{\partial\eta} = \bar{\partial}\bar{\eta}, \quad \overline{\bar{\partial}\eta} = \partial\bar{\eta}$$

である.

複素多様体 $(M, \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}), (N, \{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A})$ の間の C^∞ 級写像 $f : M \to N$ において, 各 λ, α に対して $\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap f^{-1}(V_\alpha)) \to \psi_\alpha(f(U_\lambda) \cap V_\alpha)$ が正則写像となるとき, $f : M \to N$ を**正則写像**とよぶ.

補題 2.2.6 複素多様体 M, N に対して C^∞ 級写像 $f : M \to N$ が正則写像ならば, N 上の任意の微分形式 η に対して

$$\partial(f^*\eta) = f^*\partial\eta, \quad \bar{\partial}(f^*\eta) = f^*\bar{\partial}\eta$$

が成り立つ.

証明　局所複素座標を用いて示せば良い. $\mathbb{C}^n$ の座標を $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $\mathbb{C}^m$ の座標を $(\zeta_1,\ldots,\zeta_m)$ とし, C^∞ 級写像 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ を $f(z)=(f_1(z_1,\ldots,z_n),\ldots,f_m(z_1,\ldots,z_n))$ と表す. はじめに $\mathbb{C}^m$ 上の C^∞ 級関数 η に対して $f^*\eta=\eta\circ f$ より

$$
\begin{aligned}
d(f^*\eta) &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial(\eta\circ f)}{\partial z_i}dz_i+\frac{\partial(\eta\circ f)}{\partial\bar{z}_i}d\bar{z}_i\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{\partial\eta}{\partial\zeta_j}\frac{\partial f_j}{\partial z_i}+\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\zeta}_i}\frac{\partial\bar{f}_j}{\partial z_i}\Big)dz_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{\partial\eta}{\partial\zeta_j}\frac{\partial f_j}{\partial\bar{z}_i}+\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\zeta}_i}\frac{\partial\bar{f}_j}{\partial\bar{z}_i}\Big)d\bar{z}_i\\
&= \sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{\partial\eta}{\partial\zeta_j}\partial f_j+\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\zeta}_i}\partial\bar{f}_j\Big)+\sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{\partial\eta}{\partial\zeta_j}\bar{\partial} f_j+\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\zeta}_i}\bar{\partial}\bar{f}_j\Big)
\end{aligned}
$$

となり, さらに各 f_j が正則関数ならば $\bar{\partial}f_j=0,\partial\bar{f}_j=0$ より

$$
d(f^*\eta)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\eta}{\partial\zeta_j}\partial f_j+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\zeta}_i}\bar{\partial}\bar{f}_j
$$

となる. したがって,

$$
\partial(f^*\eta)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\eta}{\partial\zeta_j}\partial f_j,\quad \bar{\partial}(f^*\eta)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\zeta}_i}\bar{\partial}\bar{f}_j
$$

である. 一方,

$$
f^*\partial\eta=f^*\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\eta}{\partial\zeta_j}d\zeta_j=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\eta}{\partial\zeta_j}df_j
$$

で各 f_j が正則関数ならば, $df_j=\partial f_j$ より

$$
f^*\partial\eta=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\eta}{\partial\zeta_j}\partial f_j
$$

となる. したがって, $\partial(f^*\eta)=f^*\partial\eta$ である. $\bar{\partial}(f^*\eta)=f^*\bar{\partial}\eta$ についても同様である. 次に, $\mathbb{C}^m$ 上の (p,q) 次微分形式 η を

$$
\eta=\sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q}\eta_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_q}d\zeta_{i_1}\wedge\ldots\wedge d\zeta_{i_p}\wedge d\bar{\zeta}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{\zeta}_{j_q}
$$

とすると, 各 f_i が正則関数ならば $\bar{\partial} f_i = 0, \partial \bar{f}_j = 0$ より

$$\begin{aligned} f^*\eta &= \sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} f^*\eta_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_q} df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_p} \wedge d\bar{f}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{f}_{j_q} \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} f^*\eta_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_q} \partial f_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial f_{i_p} \wedge \bar{\partial}\bar{f}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}\bar{f}_{j_q} \end{aligned}$$

となる. したがって, 次数を比較することにより

$$\begin{aligned} \partial(f^*\eta) &= \sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} \partial(f^*\eta_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_q}) \wedge \partial f_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial f_{i_p} \wedge \bar{\partial}\bar{f}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}\bar{f}_{j_q}, \\ \bar{\partial}(f^*\eta) &= \sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} \bar{\partial}(f^*\eta_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_q}) \wedge \partial f_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial f_{i_p} \wedge \bar{\partial}\bar{f}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}\bar{f}_{j_q} \end{aligned}$$

である. 一方,

$$f^*\partial\eta = \sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} f^*\partial\eta_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_q} \wedge df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_p} \wedge d\bar{f}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{f}_{j_q}$$

であるが, 各 f_i が正則関数ならば $\partial(f^*\eta_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_q}) = f^*\partial\eta_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_q}$, $\partial f_i = df_i$, $\bar{\partial}\bar{f}_i = d\bar{f}_i$ より $\partial(f^*\eta) = f^*\partial\eta$ となる. $\bar{\partial}(f^*\eta) = f^*\bar{\partial}\eta$ についても同様である. □

Kähler 形式については次の命題が成り立つ. 証明は [1] などを参照.

命題 2.2.7 Kähler 多様体 (M, ω) の各点 $p \in M$ において, p のある近傍 U と C^∞ 級の実関数 $K : U \to \mathbb{R}$ が存在して $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}K$ となる.

Kähler 形式 ω に対して $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}K$ となる局所的に定義された C^∞ 級の実関数 K を ω の **Kähler ポテンシャル**とよぶ.

例 2.2.8 C^∞ 級関数 $K : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ を $K(z_1, \ldots, z_n) := |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$ とすると, $\omega := \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}K = \frac{\sqrt{-1}}{2}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \cdots + dz_n \wedge d\bar{z}_n) = dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_n \wedge dy_n$ となり, ω は $\mathbb{C}^n$ 上の標準的な Kähler 形式, K はその Kähler ポテンシャルとなる.

逆に, C^∞ 級の実関数 $K : U \to \mathbb{R}$ に対して次の補題が成り立つ.

補題 2.2.9 C^∞ 級の実関数 $K : U \to \mathbb{R}$ に対して $\omega := \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}K$ は実の $(1,1)$ 次微分形式で, $d\omega = 0$ となる.

証明　$\bar{\partial}\partial = -\partial\bar{\partial}$ より $\bar{\omega} = \overline{\frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}K} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\bar{\partial}\partial K = \omega$ で ω は実の $(1,1)$ 次微分形式となり, さらに $\bar{\partial}\bar{\partial} = 0$ より $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}d\bar{\partial}K$ で $d\omega = 0$ である. $\square$

また, 次の補題が成り立つ.

補題 2.2.10　C^∞ 級の実関数 $K : U \to \mathbb{R}$ に対して $\omega := \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}K$ とし, さらに, $u, v \in T_pM$ に対して $g_p(u,v) := \omega_p(u, J_pv)$ と定める. このとき,

$$g_p(u,v) = g_p(v,u), \quad g_p(J_pu, J_pv) = g_p(u,v)$$

が成り立つ.

証明　ω は $(1,1)$ 次微分形式であるので, 点 $p \in U$ を含む複素座標近傍の局所複素座標を $(z_1, \ldots, z_n)$ とすると, ω_p は $(dz_i)_p \wedge (d\bar{z}_j)_p$ の一次結合で表される. ここで $u \in T_pM$ を $T_pM \otimes \mathbb{C}$ の元とみなして u の T'_pM 成分を u', u の T''_pM 成分を u'' とし $u = u' + u''$ と分解する. 同様に $v \in T_pM$ も $v = v' + v''$ と分解すると

$$\begin{aligned}
(dz_i)_p \wedge (d\bar{z}_j)_p(u, J_pv) &= (dz_i)_p \wedge (d\bar{z}_j)_p(u' + u'', J_pv' + J_pv'') \\
&= (dz_i)_p \wedge (d\bar{z}_j)_p(u' + u'', \sqrt{-1}v' - \sqrt{-1}v'') \\
&= -\sqrt{-1}\{(dz_i)_pu'\}\{(d\bar{z}_j)_pv''\} - \sqrt{-1}\{(dz_i)_p(v')\}\{(d\bar{z}_j)_pu''\} \\
&\vdots \\
&= (dz_i)_p \wedge (d\bar{z}_j)_p(v, J_pu).
\end{aligned}$$

したがって, $\omega_p(u, J_pv) = \omega_p(v, J_pu)$ となり, $g_p(u,v) = g_p(v,u)$, $g_p(J_pu, J_pv) = g_p(u,v)$ が成り立つ. $\square$

補題 2.2.10 で構成した g は正定値以外の Kähler 計量の条件を満たしている.

この節の最後に, 調和積分論から得られる Kähler 多様体のコホモロジーの次元に関する結果とその応用について紹介する.

複素多様体 M に対して

$$\cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,q-1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,q}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,q+1}(M) \to \cdots$$

を **Dolbeault 複体**,

$$H^{p,q}(M) := \frac{\mathrm{Ker}\{\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M)\}}{\mathrm{Im}\{\bar{\partial} : \Omega^{p,q-1}(M) \to \Omega^{p,q}(M)\}}$$

を (p,q) **次 Dolbeault コホモロジー**とよぶ. $H^{p,q}(M)$ は複素ベクトル空間であることに注意する.

このとき, 調和積分論より次の定理と系が成り立つ. 証明は [1][2] などを参照.

定理 2.2.11 複素多様体 M が閉多様体ならば $H^{p,q}(M)$ は有限次元である.

定理 2.2.12 Kähler 多様体 M が閉多様体ならば複素次元に関して次が成り立つ.

- $\dim H^k(M) \otimes \mathbb{C} = \sum_{p+q=k} \dim H^{p,q}(M)$.
- $\dim H^{q,p}(M) = \dim H^{p,q}(M)$.

ただし, $H^k(M)$ は M の k 次 de Rham コホモロジーである.

系 2.2.13 Kähler 多様体 M が閉多様体のとき, k が奇数ならば $H^k(M)$ は実ベクトル空間として偶数次元である.

この系の応用として, シンプレクティック多様体だが Kähler 多様体ではない例を構成することができる.

例 2.2.14 $\mathbb{R}^4$ の座標を (s,t,x,y) とする. $\mathbb{R}^4$ の点は自分自身または次の関係にあるとき同値として $\mathbb{R}^4$ に同値関係を定める.

$$\begin{aligned}
(s,t,x,y) &\sim (s+1,t,x,y), \\
(s,t,x,y) &\sim (s,t+1,x,x+y), \\
(s,t,x,y) &\sim (s,t,x+1,y), \\
(s,t,x,y) &\sim (s,t,x,y+1).
\end{aligned}$$

このとき, この同値関係による商空間 M はコンパクトな多様体で, $\mathbb{R}^4$ 上の標準的なシンプレクティック形式 $\omega := ds \wedge dt + dx \wedge dy$ は M 上のシンプレクティック形式を定める. また F_4 を文字 a,b,c,d を生成元とする自由群とし, N を次の $r_1,\ldots,r_6$ で生成される F_4 の正規部分群とする.

$$r_1 := aba^{-1}b^{-1}, \quad r_2 := aca^{-1}c^{-1}, \quad r_3 := ada^{-1}d^{-1},$$

$$r_4 := bdb^{-1}d^{-1}, \quad r_5 := dcbc^{-1}b^{-1}, \quad r_6 := cdc^{-1}d^{-1}.$$

このとき $\pi_1(M) \cong F_4/N$ で $H_1(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c$ より $\dim H^1(M) = 3$ となる．したがって, 系 2.2.13 より M は Kähler 多様体にはならない．この M を **Kodaira–Thurston 多様体**とよぶ.

この節の最後に, Calabi–Yau 多様体と特殊 Lagrange 部分多様体の定義と例を述べる.

定義 2.2.15　複素 n 次元 Kähler 多様体 (M,ω) 上の正則 $(n,0)$ 形式 Ω が

$$\frac{\omega^n}{n!} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \Omega \wedge \overline{\Omega}$$

を満たすとき, 組 (M,ω,Ω) を **Calabi–Yau 多様体**とよぶ.

定義 2.2.16　Calabi–Yau 多様体 (M,ω,Ω) の部分多様体 L が, ある実数 θ に対して次の条件を満たすとき, L を位相 θ の**特殊 Lagrange 部分多様体**とよぶ.

- $\dim L = \frac{1}{2}\dim M$.
- $\omega|_{TL} = 0$.
- $\mathrm{Im}\Big(e^{-\sqrt{-1}\theta}\Omega\Big)|_{TL} = 0$.

例 2.2.17　$\mathbb{C}^n$ 上, $\omega := \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i$, $\Omega := dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ とすると, 組 $(\mathbb{C}^n,\omega,\Omega)$ は Calabi–Yau 多様体である．また, n が偶数のとき,

$$L := \{(z_1,\ldots,z_n) : |z_1|^2 = |z_2|^2 + 1 = \cdots = |z_n|^2 + 1, \mathrm{Re}(z_1 \cdots z_n) = 1\}$$

は位相 0 の特殊 Lagrange 部分多様体, n が奇数のとき,

$$L := \{(z_1,\ldots,z_n) : |z_1|^2 = |z_2|^2 + 1 = \cdots = |z_n|^2 + 1, \mathrm{Im}(z_1 \cdots z_n) = 1\}$$

は位相 $\pi/2$ の特殊 Lagrange 部分多様体である.

§2.3　複素射影空間

この節では複素射影空間上の Fubini–Study 計量とよばれる Kähler 計量について解説する.

定義 2.3.1　$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ の点 $(\zeta_0,\ldots,\zeta_n), (\zeta'_0,\ldots,\zeta'_n)$ に対して, ある $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ が存在して $(\zeta_0,\ldots,\zeta_n) = (c\zeta'_0,\ldots,c\zeta'_n)$ となるとき $(\zeta_0,\ldots,\zeta_n)$ と

$(\zeta'_0, \ldots, \zeta'_n)$ は同値であると定め, この同値関係による商空間 $\mathbb{C}P^n$ を**複素射影空間**とよぶ.

$\mathbb{C}P^n$ はコンパクトな Hausdorff 空間である.

点 $(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$ の同値類を $[\zeta_0 : \cdots : \zeta_n]$ と書き, $(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)$ を**斉次座標**とよぶ. また各 $\alpha = 0, \ldots, n$ に対して $\mathbb{C}P^n$ の開集合 U_α を

$$U_\alpha := \{[\zeta_0 : \cdots : \zeta_n] \in \mathbb{C}P^n : \zeta_\alpha \neq 0\}$$

と定め, 同相写像 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ を

$$\varphi_\alpha([\zeta_0 : \cdots : \zeta_n]) := \Big(\frac{\zeta_0}{\zeta_\alpha}, \ldots, \frac{\zeta_{\alpha-1}}{\zeta_\alpha}, \frac{\zeta_{\alpha+1}}{\zeta_\alpha}, \ldots, \frac{\zeta_n}{\zeta_\alpha}\Big)$$

とする. このとき $(z_0^\alpha, \ldots, z_{\alpha-1}^\alpha, z_{\alpha+1}^\alpha, \ldots, z_n^\alpha) := \varphi_\alpha([\zeta_0 : \ldots : \zeta_n])$ を**非斉次座標**とよぶ.

ここで, $\varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{C}^n \to U_\alpha$ は

$$\varphi_\alpha^{-1}(z_0^\alpha, \ldots, z_{\alpha-1}^\alpha, z_{\alpha+1}^\alpha, \ldots, z_n^\alpha) = [z_0^\alpha : \cdots : z_{\alpha-1}^\alpha : 1 : z_{\alpha+1}^\alpha : \cdots : z_n^\alpha]$$

となる. また, $\alpha > \beta$ のとき $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ は

$$\begin{aligned} & (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(z_0^\beta, \ldots, z_{\beta-1}^\beta, z_{\beta+1}^\beta, \ldots, z_n^\beta) \\ = & \Big(\frac{z_0^\beta}{z_\alpha^\beta}, \ldots, \frac{z_{\beta-1}^\beta}{z_\alpha^\beta}, \frac{1}{z_\alpha^\beta}, \frac{z_{\beta+1}^\beta}{z_\alpha^\beta}, \ldots, \frac{z_{\alpha-1}^\beta}{z_\alpha^\beta}, \frac{z_{\alpha+1}^\beta}{z_\alpha^\beta}, \ldots, \frac{z_n^\beta}{z_\alpha^\beta}\Big) \end{aligned}$$

となり, $\alpha < \beta$ のときも同様である. したがって, $\mathbb{C}P^n$ は $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha=0,\ldots,n}$ を複素座標近傍系とする複素多様体となる.

定義 2.3.2 各 $\alpha = 0, \ldots, n$ に対して C^∞ 級関数 $K_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ を非斉次座標を用いて

$$(K_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})(z_0^\alpha, \ldots, z_{\alpha-1}^\alpha, z_{\alpha+1}^\alpha, \ldots, z_n^\alpha) := \log(1 + \sum_{l \neq \alpha} |z_l^\alpha|^2)$$

と定める. また, U_α 上の実 $(1,1)$ 次微分形式 ω_α を $\omega_\alpha := \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}K_\alpha$ と定める.

ω_α を非斉次座標を用いて表すと

$$\omega_\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i,j \neq \alpha} \frac{\partial^2 \log(1 + \sum_{l \neq \alpha} |z_l^\alpha|^2)}{\partial z_i^\alpha \partial \bar{z}_j^\alpha} dz_i^\alpha \wedge d\bar{z}_j^\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i,j\neq\alpha} \frac{\delta_{ij}(1+\sum_{l\neq\alpha}|z_l^\alpha|^2) - z_j^\alpha \bar{z}_i^\alpha}{(1+\sum_{l\neq\alpha}|z_l^\alpha|^2)^2} dz_i^\alpha \wedge d\bar{z}_j^\alpha$$

となる. さらに, $\alpha \neq \beta$ のとき

$$1 + \sum_{l\neq\alpha} |z_l^\alpha|^2 = \frac{1+\sum_{l\neq\beta}|z_l^\beta|^2}{|z_\alpha^\beta|^2}$$

となるので, $\bar{\partial}\log z_\alpha^\beta = 0$, $\partial \log \bar{z}_\alpha^\beta = 0$ より

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}\log\frac{1+\sum_{l\neq\beta}|z_l^\beta|^2}{|z_\alpha^\beta|^2} \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}\{\log(1+\sum_{l\neq\beta}|z_l^\beta|^2) - \log z_\alpha^\beta - \log \bar{z}_\alpha^\beta\} \\ &= \omega_\beta \end{aligned}$$

となる. しがたって, $\mathbb{C}P^n$ 上の実 $(1,1)$ 次微分形式 ω を $\omega|_{U_\alpha} := \omega_\alpha$ により定めることができる.

定義 2.3.3 各点 $p \in \mathbb{C}P^n$ において, $u, v \in T_p\mathbb{C}P^n$ に対して

$$g_p(u,v) := \omega_p(u, J_p v)$$

と定める. この $g = \{g_p\}_{p\in\mathbb{C}P^n}$ を $\mathbb{C}P^n$ 上の **Fubini–Study 計量**という.

実際に Fubini–Study 計量が Kähler 計量であることを示す.

補題 2.3.4 g を $\mathbb{C}P^n$ 上の Fubini–Study 計量とするとき, 任意の $u \in T_p\mathbb{C}P^n$ に対して $g_p(u,u) \geq 0$ である. また, $g_p(u,u) = 0$ ならば, $u = 0$ である.

証明 複素多様体 M の点 $p \in M$ を含む複素座標近傍の局所複素座標を $(z_1,\ldots,z_n)$, $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ とすると $u := \sum_{i=1}^n a_i\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p + \sum_{i=1}^n b_i\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_p \in T_pM$ は

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n a_i\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p + \sum_{i=1}^n b_i\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_p \\ &= \sum_{i=1}^n a_i\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial z_i}\Big)_p + \Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\Big)_p\Big\} + \sum_{i=1}^n \sqrt{-1}b_i\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial z_i}\Big)_p - \Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\Big)_p\Big\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(a_i+\sqrt{-1}b_i)\Big(\frac{\partial}{\partial z_i}\Big)_p+\sum_{i=1}^{n}(a_i-\sqrt{-1}b_i)\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\Big)_p$$

となる. 以下では, $\mathbb{C}P^n$ において $\alpha=0$ の場合の非斉次座標 $(z_1^0,\ldots,z_n^0)$ を単に $(z_1,\ldots,z_n)$ と書き, さらに $K:=\log(1+\sum_{l=1}^n|z_l|^2)$, $\omega:=\frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}K$ とする. ここで $u_i:=a_i+\sqrt{-1}b_i$ とすると, 点 $p=(z_1,\ldots,z_n)\in U_0$ において

$$\begin{aligned}
g_p(u,u) &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta_{ij}(1+\sum_{l=1}^n|z_l|^2)-z_j\bar{z}_i}{(1+\sum_{l=1}^n|z_l|^2)^2}dz_i\wedge d\bar{z}_j \\
&\quad (\sum_{a=1}^{n}u_a\Big(\frac{\partial}{\partial z_a}\Big)_p+\sum_{a=1}^{n}\bar{u}_a\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_a}\Big)_p, \sqrt{-1}\sum_{b=1}^{n}u_b\Big(\frac{\partial}{\partial z_b}\Big)_p-\sqrt{-1}\sum_{b=1}^{n}\bar{u}_b\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_b}\Big)_p) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta_{ij}(1+\sum_{l=1}^n|z_l|^2)-z_j\bar{z}_i}{(1+\sum_{l=1}^n|z_l|^2)^2}u_i\bar{u}_j \\
&= \frac{1}{(1+\sum_{l=1}^n|z_l|^2)^2}\big\{(1+\sum_{l=1}^{n}|z_l|^2)\sum_{i=1}^{n}|u_i|^2-(\sum_{i=1}^{n}u_i\bar{z}_i)(\sum_{j=1}^{n}\bar{u}_jz_j)\big\} \\
&\geq \frac{\sum_{i=1}^n|u_i|^2}{(1+\sum_{l=1}^n|z_l|^2)^2}
\end{aligned}$$

となる. ただし, 最後の不等号は Cauchy–Schwarz の不等式を用いた. したがって $g_p(u,u)\geq 0$ である. また, $g_p(u,u)=0$ ならば, $u=0$ である. $\alpha\neq 0$ の場合の非斉次座標でも同様である. □

この補題 2.3.4 と補題 2.2.10 より, Fubini–Study 計量は Hermite 計量である. さらにその基本 2 次微分形式は ω そのもので補題 2.2.9 より $d\omega=0$ となる. したがって Fubini–Study 計量は Kähler 計量である.

複素射影空間では多項式を用いて複素部分多様体を容易に構成することができる. 例えば, 自然数 d に対して

$$N:=\{[\zeta_0:\cdots:\zeta_n]\in\mathbb{C}P^n:\zeta_0^d+\cdots+\zeta_n^d=0\}$$

は, 各非斉次座標近傍上で陰関数の定理を用いることにより, 複素 $n-1$ 次元の複素部分多様体であることがわかる. またしたがって, 補題 2.1.7 より N は Kähler 多様体である.

複素射影空間の複素部分多様体を**代数多様体**とよぶ.

第 3 章　余随伴軌道

§3.1　Lie 群

この節では本稿で必要となる Lie 群に関する内容について確認する.

定義 3.1.1　C^∞ 級多様体 G が次の条件を満たすとき, G を **Lie 群**とよぶ.

- G は群.
- $G \times G$ を直積多様体とするとき, 群の積 $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$, は C^∞ 級写像.
- 逆元を対応させる写像 $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, は C^∞ 級写像.

Lie 群の多様体としての次元を Lie 群の次元とよぶ. また, Lie 群 G が多様体としてコンパクトのとき, G をコンパクトな Lie 群とよぶ.

以下に基本的な Lie 群の例を挙げる.

例 3.1.2　群に離散位相を入れたものは 0 次元多様体とみなして Lie 群である.

例 3.1.3　$\mathbb{R}^n$ はそのまま n 次元多様体であり, 通常の和に関して Lie 群である.

例 3.1.4　$S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ は通常の複素数の積に関して Lie 群である. また, n 個の S^1 の直積 $T^n := S^1 \times \cdots \times S^1$ において, 積 $T^n \times T^n \to T^n$ を $((z_1, \ldots, z_n), (w_1, \ldots, w_n)) \mapsto (z_1 w_1, \ldots, z_n w_n)$ と定めると, T^n は Lie 群である. T^n を n 次元トーラスという.

例 3.1.5　成分が実数の n 次正方行列全体 $M_n(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視し, 一般線形群 $GL_n(\mathbb{R})$ を

$$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$$

と定める. $GL_n(\mathbb{R})$ は行列の積に関して群であり, また, $GL_n(\mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ の開集合なので n^2 次元多様体である. さらに, $GL_n(\mathbb{R})$ における行列の積と逆元を対応させる写像は, 行列の成分を用いて具体的に表すことができるので C^∞ 級写像であり, したがって, $GL_n(\mathbb{R})$ は Lie 群である.

行列 A の転置行列を ${}^tA$ で表し, E を単位行列とする. n 次直交群 $O(n)$ を

$$O(n) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : {}^tAA = E\}$$

と定め, また, n 次特殊直交群 $SO(n)$ を

$$SO(n) := \{A \in O(n) : \det A = 1\}$$

と定める. このとき, $O(n)$ と $SO(n)$ は $GL_n(\mathbb{R})$ の部分群であり, また, 陰関数の定理を用いることにより, $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ のコンパクトな $\frac{n(n-1)}{2}$ 次元部分多様体となる. したがって, $O(n)$ と $SO(n)$ は Lie 群である.

同様に, 成分が複素数の n 次正方行列全体を $M_n(\mathbb{C})$ とすると, 一般線形群 $GL_n(\mathbb{C}) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$ は実 $2n^2$ 次元の Lie 群である. また, $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ に対して ${}^t\bar{A} := [\bar{a}_{ji}]$ とするとき, n 次ユニタリ群 $U(n)$ を

$$U(n) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) : {}^t\bar{A}A = E\}$$

と定め, n 次特殊ユニタリ群 $SU(n)$ を

$$SU(n) := \{A \in U(n) : \det A = 1\}$$

と定める. このとき, $U(n)$ と $SU(n)$ は $GL_n(\mathbb{C})$ の部分群であり, また陰関数の定理を用いることにより $U(n)$ は $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ のコンパクトな実 n^2 次元部分多様体, $SU(n)$ は $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ のコンパクトな実 $n^2 - 1$ 次元部分多様体となる. したがって, $U(n)$ と $SU(n)$ も Lie 群である.

次に Lie 群の作用について解説する.

定義 3.1.6 M を C^∞ 級多様体, G を Lie 群とする. C^∞ 級写像 $G \times M \to M$, $(g, p) \mapsto gp$, が次の条件を満たすとき, G は M に**左から作用する**という.

- 任意の $g_1, g_2 \in G$ と点 $p \in M$ に対して $g_1(g_2p) = (g_1g_2)p$.
- G の単位元 e と任意の点 $p \in M$ に対して $ep = p$.

同様に, C^∞ 級写像 $M \times G \to M$, $(p, g) \mapsto pg$, が次の条件を満たすとき, G は M に**右から作用する**という.

- 任意の点 $p \in M$ と $g_1, g_2 \in G$ に対して $(pg_1)g_2 = p(g_1g_2)$.
- 任意の点 $p \in M$ と G の単位元 e に対して $pe = p$.

左からの作用, 右からの作用を単に左作用, 右作用ともいう.

例 3.1.7 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ を原点を中心とする $n-1$ 次元球面とする. 点 $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ を列ベクトルで表すとき, 行列の掛け算による写像 $SO(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$, $(A, \boldsymbol{x}) \mapsto A\boldsymbol{x}$, は $SO(n)$ の S^{n-1} への左作用であり, 写像 $S^{n-1} \times SO(n) \to S^{n-1}$, $(\boldsymbol{x}, A) \mapsto {}^t A\boldsymbol{x}$, は $SO(n)$ の S^{n-1} への右作用となる.

文脈によっては, 点 $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ を行ベクトルで表し, $SO(n)$ の S^{n-1} への右作用を $S^{n-1} \times SO(n) \to S^{n-1}$, $(\boldsymbol{x}, A) \mapsto \boldsymbol{x}A$, とすることもある.

例 3.1.8 $\mathbb{C}$ を多様体とみなし, $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を複素数の掛け算で Lie 群とみなす. このとき, 写像 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(t, z) \mapsto tz$, は $\mathbb{C}^*$ の $\mathbb{C}$ への左作用である. ただし, $\mathbb{C}^*$ は可換群なので, この場合, 左作用と右作用の区別はない.

定義 3.1.9 Lie 群 G が多様体 M に右から作用しているとする. このとき, 点 $p \in M$ に対して

$$pG := \{pg : g \in G\}$$

を点 p の**軌道**とよぶ.

点 $p, q \in M$ に対して, ある $g \in G$ が存在して $p = qg$ となるとき $p \sim q$ と定めると関係 $\sim$ は同値関係となり, 点 p の軌道 pG とはまさに点 p の同値類である. この同値関係による商空間を**軌道空間**とよび, M/G と書く.

一般に軌道空間は Hausdorff 空間とは限らない. 例えば, 例 3.1.8 では $\mathbb{C}/\mathbb{C}^* = \{0\mathbb{C}^*, 1\mathbb{C}^*\}$ で, 商位相の開集合系は $\{\emptyset, \{1\mathbb{C}^*\}, \mathbb{C}/\mathbb{C}^*\}$ である. したがって, $0\mathbb{C}^*$ と $1\mathbb{C}^*$ の任意の近傍の共通部分は空ではない. 一方, G がコンパクトならば軌道空間 M/G は Hausdorff 空間となる.

次に軌道空間が C^∞ 級多様体になるための条件を考える.

定義 3.1.10 Lie 群 G が多様体 M に右から作用しているとする. このとき, 点 $p \in M$ に対して

$$G_p := \{g \in G : pg = p\}$$

を点 $p \in M$ の**固定化部分群**とよぶ. また任意の点 $p \in M$ に対して $G_p = \{e\}$ となるとき G は M に**自由に作用する**という.

この準備のもと, 次の命題が成り立つ.

命題 3.1.11 M を n 次元多様体, G を m 次元のコンパクトな Lie 群とし, G

が M へ右から自由に作用しているとする．このとき, 軌道空間 M/G は $n-m$ 次元 C^∞ 級多様体の構造を持ち, また射影 $\pi : M \to M/G$ は, この C^∞ 級多様体の構造に関して C^∞ 級写像となる．

証明の概略は以下の通りである．原点 0 を中心とする $n-m$ 次元開円盤 D と各点 $p \in M$ に対して埋め込み $f_p : D \times G \to M$ で $f_p(0,e) = p$ かつ $f_p(x,g) = f_p(x,e)g$ を満たすものを構成することができる．ここで $\pi : M \to M/G$ を射影とし, $\underline{p} := pG \in M/G$ とすると $U_{\underline{p}} := \pi(f_p(D \times \{e\})) \subset M/G$ は点 $\underline{p} \in M/G$ の開近傍となり, 同相写像 $\varphi_{\underline{p}} : U_{\underline{p}} \to D$ を $\pi^{-1}(\underline{q}) \cap f_p(D \times \{e\}) = f_p(\varphi_{\underline{p}}(\underline{q}), e)$ により定めることができる．さらに, G の作用が C^∞ 級であることから座標変換が C^∞ 級写像になることを示すことができ, M/G は $\{(U_{\underline{p}}, \varphi_{\underline{p}})\}_{\underline{p} \in M/G}$ を座標近傍系とする $n-m$ 次元の C^∞ 級多様体となる．

この節では Lie 群が多様体に右から作用している場合を考えたが, 左から作用している場合も同様に考えることができる．

Lie 群 G が C^∞ 級多様体 M に右から作用しているとき, 点 $p \in M$ の軌道 $pG \subset M$ はどうなるであろうか．点 $p \in M$ に対して固定化部分群 G_p は G の部分群であり, かつ G の閉集合である．一般に Lie 群の閉部分群は部分多様体となることが知られており, したがって Lie 群となる．これより G_p そのものを Lie 群とみなすと写像 $G_p \times G \to G$, $(h,g) \mapsto hg$, は G_p の G への左作用となり, G_p がコンパクトならば命題 3.1.11 より軌道空間 $G_p \backslash G$ は C^∞ 級多様体となる．また, 写像 $\phi : G_p \backslash G \to pG$, $G_p g \mapsto pg$, は全単射となるが, さらに pG は M の部分多様体で, かつ ϕ が微分同相写像になることがわかる．

一般に Lie 群 G を Lie 部分群 K の右作用で割った商空間 G/K, 左作用で割った商空間 $K \backslash G$ を**等質空間**とよぶ．Lie 群の作用に関する軌道は等質空間となる．

§3.2　Lie 環

定義 3.2.1　Lie 群 G の単位元 e における接空間 T_eG を G の **Lie 環**とよぶ．

慣習的に Lie 群 G の Lie 環 T_eG はドイツ文字 $\mathfrak{g}$ で表す．

例 3.2.2　$GL_n(\mathbb{R})$ の Lie 環を $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ とすると, $GL_n(\mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R})$ の開集合なので $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = T_E M_n(\mathbb{R})$ であり, さらに $M_n(\mathbb{R})$ はベクトル空間なので $T_E M_n(\mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R})$ と同一視できる．したがって, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \cong M_n(\mathbb{R})$ である．特に $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ を (i,j) 成分が 1 で他の成分が 0 の行列, $M_n(\mathbb{R})$ の点を $x = [x_{ij}]$

と表すと, $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_E \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ と $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ が対応する.

さらに, n 次直行群 $O(n)$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分多様体であるので, その Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ の部分空間となる. このとき, $c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to O(n)$ を $c(0)=E, \dot{c}(0)=X$ となる $O(n)$ の曲線とすると, ${}^t c(t)c(t)=E$ の両辺を $t=0$ で微分して ${}^tX+X=0$ となり, 逆に ${}^tX+X=0$ を満たす行列 X に対して $c(t):=e^{tX}$ とすると, $c(t)\in O(n), c(0)=E, \dot{c}(0)=X$ となる. したがって, $O(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ は

$$\mathfrak{o}(n)=\{X\in M_n(\mathbb{R}) : {}^tX+X=0\}$$

と表すことができる. また, n 次特殊直交群 $SO(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{so}(n)$ も

$$\mathfrak{so}(n)=\{X\in M_n(\mathbb{R}) : {}^tX+X=0\}$$

となる.

同様に, 一般線形群 $GL_n(\mathbb{C})$ の Lie 環 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ は $M_n(\mathbb{C})$ と実ベクトル空間として同型であり, n 次ユニタリ群 $U(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の部分空間で

$$\mathfrak{u}(n)=\{X\in M_n(\mathbb{C}) : {}^t\bar{X}+X=0\}$$

となる. また, n 次特殊ユニタリ群 $SU(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{su}(n)$ は

$$\mathfrak{su}(n)=\{X\in M_n(\mathbb{C}) : {}^t\bar{X}+X=0,\ \mathrm{tr}X=0\}$$

となることがわかる. ただし, $\mathrm{tr}\,X$ は X のトレースである.

Lie 群 G の元 $g\in G$ に対して, C^∞ 級写像 $L_g : G\to G$ を $L_g(x):=gx$ と定める. 特に, $(L_g)^{-1}=L_{g^{-1}}$ より L_g は微分同相写像である. また, G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 $X\in\mathfrak{g}$ に対して, G 上のベクトル場 $\overline{X}$ を

$$\overline{X}_g := (L_g)_* X$$

と定める. このとき, 任意の $h\in G$ に対して $(L_h)_*\overline{X}=\overline{X}$ となることに注意する. 一般に, G 上のベクトル場 V が任意の $h\in G$ に対して $(L_h)_*V=V$ となるとき V を**左不変ベクトル場**とよぶ. 実は G 上の左不変ベクトル場全体を $\mathfrak{X}_L(G)$ とすると, 写像 $\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}_L(G)$, $X\mapsto\overline{X}$, はベクトル空間の同型写像となり, 逆写像は $\overline{X}\mapsto\overline{X}_e$ である.

写像 $L_g : G\to G$ は微分同相写像であるので, G 上の任意のベクトル場 V, W に対して $(L_g)_*[V,W]=[(L_g)_*V,(L_g)_*W]$ が成り立つ. したがって, 特に $\overline{X},\overline{Y}\in$

$\mathfrak{X}_L(G)$ ならば, 任意の $h \in G$ に対して $(L_h)_*[\overline{X}, \overline{Y}] = [(L_h)_*\overline{X}, (L_h)_*\overline{Y}] = [\overline{X}, \overline{Y}]$ より $[\overline{X}, \overline{Y}] \in \mathfrak{X}_L(G)$ となる.

定義 3.2.3　双線形写像 $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を, $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[X, Y] := [\overline{X}, \overline{Y}]_e$$

と定め, 組 $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ を **Lie 代数**とよぶ.

ベクトル場の括弧積の性質より, Lie 環の括弧積について次が成り立つ.

- $[X, Y] = -[Y, X]$.
- （**Jacobi 律**）$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

例 3.2.2 の行列で与えられる Lie 環の括弧積は以下のようになる. $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_e \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ に $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ を対応させることにより $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ と $M_n(\mathbb{R})$ を同一視すると, 左不変ベクトル場 $\overline{E_{ij}}$ は $(\overline{E_{ij}})_x = \sum_{a=1}^n x_{ai}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{aj}}\right)_x$ となり, ベクトル場の括弧積は $[\overline{E_{ij}}, \overline{E_{kl}}] = \delta_{jk}\overline{E_{il}} - \delta_{li}\overline{E_{kj}}$ となる. したがって, Lie 環の括弧積は

$$[E_{ij}, E_{kl}] := [\overline{E_{ij}}, \overline{E_{kl}}]_e = \delta_{jk}(\overline{E_{il}})_e - \delta_{li}(\overline{E_{kj}})_e = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}$$

となり, これは $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ と $M_n(\mathbb{R})$ の同一視のもと行列の括弧積 $E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij}$ と一致する. これより $X, Y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \cong M_n(\mathbb{R})$ に対して $[X, Y] = XY - YX$ となる. また, $\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$ の括弧積は $O(n)$, $SO(n)$ が $GL_n(\mathbb{R})$ の部分多様体であることより, そのまま $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ の括弧積を制限して行列の括弧積と一致する. $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{su}(n)$ についても同様である.

定義 3.2.4　Lie 群 G が C^∞ 級多様体 M に右から作用しているとする. 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ を $c(0) = e$, $\dot{c}(0) = X$ を満たすようにとり, M 上のベクトル場 $X^\# = \{X_p^\#\}_{p \in M}$ を

$$X_p^\# := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} pc(t) \in T_pM$$

と定める. $X^\#$ を**基本ベクトル場**とよぶ.

このとき, $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[X^\#, Y^\#] = [X, Y]^\#$$

が成り立つ. ただし, 左辺は M 上のベクトル場の括弧積であり, 右辺は Lie 環の括弧積である.

§3.3 余随伴軌道

この節では余随伴軌道とよばれるシンプレクティック多様体を構成する. 以下では引き続き G を Lie 群, $e \in G$ を単位元, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする.

任意の元 $g \in G$ に対して C^∞ 級写像 $\phi_g : G \to G$ を $\phi_g(x) := gxg^{-1}$ と定める. このとき, $\phi_e(x) = x$ かつ $\phi_{g_1} \circ \phi_{g_2} = \phi_{g_1 g_2}$ が成り立ち, 特に $(\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}}$ より ϕ_g は微分同相写像となる. ここで $\phi_g(e) = e$ に注意して, $e \in G$ における ϕ_g の微分 $(\phi_g)_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を Ad_g と書くと, 写像 $G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(g, X) \mapsto Ad_g X$, は G の $\mathfrak{g}$ への左作用となる. この作用を G の**随伴作用**とよぶ.

一般に, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ が $c(0) = e$, $\dot{c}(0) = X$ を満たすとき, $Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{c(t)} Y = [X, Y]$$

が成り立つ. 証明は省略するが, これは§3.2 の行列で表される Lie 環の場合 $Ad_{c(t)} Y = c(t) Y c(t)^{-1}$ より $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} Ad_{c(t)} Y = XY - YX$ となることからわかる.

$\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の双対空間とし, 写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ を $\langle \xi, X \rangle := \xi(X)$ とする.

定義 3.3.1 G の $\mathfrak{g}^*$ への右作用 $\mathfrak{g}^* \times G \to \mathfrak{g}^*$, $(\xi, g) \mapsto \xi g$, を

$$\langle \xi g, X \rangle := \langle \xi, Ad_g X \rangle$$

により定める. この作用を G の**余随伴作用**とよぶ. ξg はしばしば記号 $Ad_g^* \xi$ を用いる.

定義 3.3.2 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ に対して, 余随伴作用の軌道 $\mathcal{O}_\xi := \{\xi g : g \in G\}$ を**余随伴軌道**とよぶ.

余随伴軌道 $\mathcal{O}_\xi \subset \mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{g}^*$ の部分多様体で, G_ξ を ξ の固定化部分群とすると, $\mathcal{O}_\xi$ は $G_\xi \backslash G$ と微分同相である. また, 点 $p \in \mathcal{O}_\xi$ における接ベクトル $v \in T_p \mathcal{O}_\xi$ に対して, ある $X \in \mathfrak{g}$ が存在して $v = X_p^\#$ となる. ただし, 一般に X は一意的ではなく点 $p \in \mathfrak{g}^*$ の固定化部分群 G_p の Lie 環の分だけ不定性が残る.

定義 3.3.3　$\mathcal{O}_\xi$ 上の 2 次微分形式 ω を, 点 $p \in \mathcal{O}_\xi$ と $u = X_p^\#$, $v = Y_p^\# \in T_p\mathcal{O}_\xi$ に対して

$$\omega_p(u, v) := \langle p, [X, Y] \rangle$$

と定める. この ω を余随伴軌道上の **Kirillov–Kostant–Souriau 形式**とよぶ.

補題 3.3.4　$X_p^\# = X_p'^\#$, $Y_p^\# = Y_p'^\#$ ならば $\omega_p(X_p^\#, Y_p^\#) = \omega_p(X_p'^\#, Y_p'^\#)$ である.

証明　はじめに $Y = Y'$ とする. 曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$, $c' : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ をそれぞれ $c(0) = e$, $\dot{c}(0) = X$, $c'(0) = e$, $\dot{c}'(0) = X'$ とすると

$$\begin{aligned}
\omega_p(X_p^\#, Y_p^\#) &= \langle p, [X, Y] \rangle \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle p, Ad_{c(t)} Y \rangle \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle pc(t), Y \rangle \\
&= \langle X_p^\#, Y \rangle \\
&= \langle X_p'^\#, Y \rangle \\
&\vdots \\
&= \omega_p(X_p'^\#, Y_p^\#)
\end{aligned}$$

となり, $\omega_p(X_p^\#, Y_p^\#)$ は X の選び方に依らない. したがって $\omega_p(X_p^\#, Y_p^\#) = -\omega_p(Y_p^\#, X_p^\#)$ に注意すると Y の選び方にも依らず $\omega_p(X_p^\#, Y_p^\#) = \omega_p(X_p'^\#, Y_p'^\#)$ が成り立つ. □

この補題より, 定義 3.3.3 の $\omega_p(u, v)$ は X, Y の選び方に依らず定まる.

次に ω がシンプレクティック形式であることを示す.

補題 3.3.5　ω は非退化である.

証明　$u = X_p^\#$ が任意の $v = Y_p^\#$ に対して $\omega_p(u, v) = 0$ とすると, 補題 3.3.4 の証明と同様に

$$\omega_p(u, v) = \omega_p(X_p^\#, Y_p^\#) = \langle p, [X, Y] \rangle = \langle X_p^\#, Y \rangle = 0$$

が任意の $Y \in \mathfrak{g}$ に対して成り立つので $X_p^\# = 0$ となり, したがって $u = 0$ で ω は非退化となる. □

一般に, C^∞ 級多様体上の 2 次微分形式 ω と任意のベクトル場 X_1, X_2, X_3 に対して

$$
\begin{aligned}
(d\omega)(X_1,X_2,X_3) &= X_1(\omega(X_2,X_3)) + X_2(\omega(X_3,X_1)) + X_3(\omega(X_1,X_2)) \\
&\quad -\omega([X_1,X_2],X_3) - \omega([X_2,X_3],X_1) - \omega([X_3,X_1],X_2)
\end{aligned}
$$

であった. これを用いて次の補題を示す.

補題 3.3.6 $d\omega = 0$.

証明 $X \in \mathfrak{g}$ に対して曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ を $c(0) = e$, $\dot{c}(0) = X$ とする. 点 $x \in \mathcal{O}_\xi$ と $Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して $\omega_x(Y^\#, Z^\#) = \langle x, [Y,Z] \rangle$ であることに注意すると, 点 $p \in \mathcal{O}_\xi$ において

$$
\begin{aligned}
X_p^\#(\omega(Y^\#, Z^\#)) &= X_p^\# \langle x, [Y,Z] \rangle \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle pc(t), [Y,Z] \rangle \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle p, Ad_{c(t)}[Y,Z] \rangle \\
&= \langle p, [X,[Y,Z]] \rangle, \\
-\omega_p([Y^\#, Z^\#]_p, X_p^\#) &= -\omega_p([Y,Z]_p^\#, X_p^\#) \\
&= \omega_p(X_p^\#, [Y,Z]_p^\#) \\
&= \langle p, [X,[Y,Z]] \rangle.
\end{aligned}
$$

となる. 他の場合も同様で, したがって Jacobi 律より

$$
\begin{aligned}
(d\omega)_p(X_p^\#, Y_p^\#, Z_p^\#) &= X_p^\#(\omega(Y^\#, Z^\#)) + Y_p^\#(\omega(Z^\#, X^\#)) + Z_p^\#(\omega(X^\#, Y^\#)) \\
&\quad -\omega_p([X^\#, Y^\#]_p, Z_p^\#) - \omega([Y^\#, Z^\#]_p, X_p^\#) - \omega([Z^\#, X^\#]_p, Y_p^\#) \\
&= 2\langle p, [Z,[X,Y]] + [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] \rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となり, $d\omega = 0$ である. □

これで Kirillov–Kostant–Souriau 形式 ω が余随伴軌道上のシンプレクティック形式であることが示せた.

この節の残りで余随伴軌道と Kirillov–Kostant–Souriau 形式の例を挙げる.

例 3.3.7　$U(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : {}^t\bar{X} + X = 0\}$ の双対空間 $\mathfrak{u}(n)^*$ を

$$\mathfrak{u}(n)^* = \{\xi \in M_n(\mathbb{C}) : {}^t\bar{\xi} + \xi = 0\},$$

写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{u}(n)^* \times \mathfrak{u}(n) \to \mathbb{R}$ を $\xi \in \mathfrak{u}(n)^*$, $X \in \mathfrak{u}(n)$ に対して

$$\langle \xi, X \rangle = \mathrm{tr}(\xi X)$$

と与える．このとき, 随伴作用が $Ad_A X = AXA^{-1}$ となることから, 余随伴作用 $Ad_A^* \xi$ は任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} \langle Ad_A^* \xi, X \rangle &= \langle \xi, Ad_A X \rangle \\ &= \langle \xi, AXA^{-1} \rangle \\ &= \mathrm{tr}(\xi AXA^{-1}) \\ &= \mathrm{tr}(A^{-1}\xi AX) \\ &= \langle A^{-1}\xi A, X \rangle \end{aligned}$$

より $Ad_A^* \xi = A^{-1}\xi A$ となる．また, 歪 Hermite 行列 $\xi \in \mathfrak{u}(n)^*$ はユニタリ行列 $A \in U(n)$ を用いて $A^{-1}\xi A$ により対角化でき, その固有値は純虚数または 0 である．したがって, 余随伴軌道 $\mathcal{O}_\xi$ は $\xi \in \mathfrak{u}(n)^*$ の固有値により決まることがわかる．

例 3.3.8　$SO(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{so}(3)$ の基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ を

$$e_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と定める．このとき, $A = [a_{ij}] \in SO(3)$ に対して $A^{-1} = {}^tA$ に注意すると

$$\begin{aligned} Ad_A(e_1) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{33}a_{22} - a_{32}a_{23} \\ a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} \\ a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる．同様に, $Ad_A(e_2), Ad_A(e_3)$ を計算すると

$$\begin{bmatrix} Ad_A(e_1) & Ad_A(e_2) & Ad_A(e_3) \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{33}a_{22} - a_{32}a_{23} & -a_{33}a_{21} + a_{31}a_{23} & a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22} \\ a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & -a_{13}a_{31} + a_{11}a_{33} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} \\ a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13} & -a_{23}a_{11} + a_{21}a_{13} & a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix}
$$

となる. ここで A の余因子行列を $\tilde{A}$ とすると, ${}^tAA = E$, $\det A = 1$ に注意して

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} Ad_A(e_1) & Ad_A(e_2) & Ad_A(e_3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} {}^t\tilde{A} \\
&= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} A
\end{aligned}
$$

となり, したがって, 基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ に関する Ad_A の表現行列は A となる. これより基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ を $\mathbb{R}^3$ の標準基底と同一視し $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$ とみなすと, Ad_A は A を行列の積で $\mathbb{R}^3$ に作用させるものと一致する.

次に $\{e_1, e_2, e_3\}$ の双対基底を $\{e^1, e^2, e^3\}$ とすると, 基底 $\{e^1, e^2, e^3\}$ に関する Ad_A^* の表現行列は ${}^tA$ となる. したがって, 基底 $\{e^1, e^2, e^3\}$ を $\mathbb{R}^3$ の標準基底と同一視し $\mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3$ とみなすと, Ad_A^* は ${}^tA$ を行列の積で $\mathbb{R}^3$ に作用させるものと一致する. したがって, $\xi \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ に対して余随伴軌道 $\mathcal{O}_\xi$ は 2 次元球面に微分同相になる.

ここで, $r := |\xi| \neq 0$ のとき $\mathcal{O}_\xi$ の径数表示 $f : [-\pi, \pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathcal{O}_\xi$ を

$$
f(\theta, \varphi) := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}
$$

とすると

$$
f_*\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) = \begin{bmatrix} -r\sin\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_*\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big) = \begin{bmatrix} -r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{bmatrix}
$$

となる. 一方,

$$
\begin{aligned}
Ad^*_{\exp(te_1)}(f(\theta, \varphi)) &= {}^t(\exp(te_1)) f(\theta, \varphi) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

より点 $f(\theta,\varphi)\in\mathcal{O}_\xi$ における e_1 の基本ベクトル $e_1^\# := \frac{d}{dt}|_{t=0}Ad^*_{\exp(te_1)}(f(\theta,\varphi))$ は

$$e_1^\# = \begin{bmatrix} 0 \\ r\sin\varphi \\ -r\sin\theta\cos\varphi \end{bmatrix}$$

となる. 同様に, 点 $f(\theta,\varphi)\in\mathcal{O}_\xi$ における e_2, e_3 の基本ベクトル $e_2^\#, e_3^\#$ は

$$e_2^\# = \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ 0 \\ r\cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix}, \quad e_3^\# = \begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ -r\cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり, したがって

$$f_*\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) = -e_3^\#, \quad f_*\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big) = -\sin\theta e_1^\# + \cos\theta e_2^\#$$

を得る. これを用いると, $\mathcal{O}_\xi$ 上の Kirillov–Kostant–Souriau 形式 ω は $f(\theta,\varphi) = r\cos\theta\cos\varphi e^1 + r\sin\theta\cos\varphi e^2 + r\sin\theta e^3$, $[e_3,e_1]=e_2$, $[e_3,e_2]=-e_1$ より

$$\begin{aligned}
(f^*\omega)_{(\theta,\varphi)}(\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\Big),\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)) &= \omega_{f(\theta,\varphi)}(f_*\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\Big), f_*\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)) \\
&= \omega_{f(\theta,\varphi)}(-e_3^\#, -\sin\theta e_1^\# + \cos\theta e_2^\#) \\
&= \langle f(\theta,\varphi), [-e_3, -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2]\rangle \\
&= \langle f(\theta,\varphi), \sin\theta e_2 + \cos\theta e_1\rangle \\
&= \langle r\cos\theta\cos\varphi e^1 + r\sin\theta\cos\varphi e^2 + r\sin\theta e^3, \sin\theta e_2 + \cos\theta e_1\rangle \\
&= r\cos\varphi
\end{aligned}$$

となり, したがって, $f^*\omega = r\cos\varphi\, d\theta\wedge d\varphi$ を得る. また, これより

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{O}_\xi}\omega &= \int_{[-\pi,\pi)\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} f^*\omega \\
&= \iint_{[-\pi,\pi)\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} r\cos\varphi\, d\theta d\varphi \\
&= 4\pi r
\end{aligned}$$

となる.

第 4 章　シンプレクティック商

§ 4.1　運動量写像

この節では運動量写像の定義と基本的な性質について解説する．

以下では G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環, $\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の双対空間とする．

定義 4.1.1　Lie 群 G がシンプレクティック多様体 (M,ω) に右から作用しているとき, $g \in G$ に対して写像 $R_g : M \to M$ を $R_g(p) := pg$ と定める．任意の $g \in G$ に対して $R_g^*\omega = \omega$ となるとき, G の作用は ω **を保つ**という．

定義 4.1.2　シンプレクティック多様体 (M,ω) への G の右作用が ω を保つとする．写像 $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ が次の条件を満たすとき, μ を G の作用についての**運動量写像**とよぶ．

- 任意の点 $p \in M$ と $g \in G$ に対して $\mu(pg) = \mu(p)g$．ただし右辺の $\mu(p)g$ は余随伴作用．
- 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\mu_X \in C^\infty(M)$ を点 $p \in M$ に対して $\mu_X(p) := \langle \mu(p), X\rangle$ と定める．このとき, $i(X^\#)\omega = -d\mu_X$．

運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ が存在するとき, G の (M,ω) への作用を **Hamilton 作用**とよぶ．

一般に, シンプレクティック形式を保つ Lie 群の作用が, いつでも運動量写像を持つという訳ではない．

例 4.1.3　$\mathbb{C}^n$ の点を $z = (z_1,\dots,z_n)$ と表し, $(M,\omega) := (\mathbb{C}^n, \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i)$ とする．また $S^1 := \{e^{i\theta} \in \mathbb{C}\}$ の $\mathbb{C}^n$ への作用 $\mathbb{C}^n \times S^1 \to \mathbb{C}^n$ を $(z, e^{i\theta}) \mapsto ze^{i\theta} := (z_1e^{i\theta},\dots,z_ne^{i\theta})$ とする．このとき

$$
\begin{aligned}
R_{e^{i\theta}}^*\omega &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n d(z_i \circ R_{e^{i\theta}}) \wedge d(\bar{z}_i \circ R_{e^{i\theta}}) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n d(z_ie^{i\theta}) \wedge d\overline{z_ie^{i\theta}} \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n e^{i\theta}dz_i \wedge e^{-i\theta}d\bar{z}_i \\
&= \omega
\end{aligned}
$$

より S^1 の作用は ω を保つ．次に，S^1 の単位元は $1 \in \mathbb{C}$ であり，S^1 の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の基底を $\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)_1$，$\mathfrak{g}^*$ の基底を $(d\theta)_1$ と表す．このとき，$X = a\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)_1 \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathbb{C}^n$ 上の基本ベクトル場 $X^\#$ は $X^\#_z = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} ze^{iat} \in T_z\mathbb{C}^n$ となる．ここで，C^∞ 級写像 $\mu : \mathbb{C}^n \to \mathfrak{g}^*$ を

$$\mu(z) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n |z_i|^2 (d\theta)_1$$

と定めると $\mu(ze^{i\theta}) = \mu(z)$ であるが，S^1 の積が可換で余随伴作用が自明であることから $\mu(ze^{i\theta}) = Ad^*_{e^{i\theta}}\mu(z)$ となる．また，$\mu_X(z) = \frac{a}{2}\sum_{i=1}^n |z_i|^2$ であり

$$\begin{aligned} i(X^\#)\omega &= \Big(\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i\Big)\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{iat}z, \cdot\Big) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n \Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{iat}z_i d\bar{z}_i - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \overline{e^{iat}z_i} dz_i\Big) \\ &= -\frac{a}{2}\sum_{i=1}^n d|z_i|^2 \\ &= -d\mu_X \end{aligned}$$

となる．したがって，$\mu : \mathbb{C}^n \to \mathfrak{g}^*$ は運動量写像である．

例 4.1.4 $(M, \omega) := (\mathbb{C}^n, \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i)$ とする．点 $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ を行ベクトル $\boldsymbol{z} := [z_1 \ \cdots \ z_n]$ と同一視し，$U(n)$ の $\mathbb{C}^n$ への右作用 $\mathbb{C}^n \times U(n) \to \mathbb{C}^n$ を $(\boldsymbol{z}, A) \mapsto \boldsymbol{z}A$ とする．このとき，$A = [a_{ij}] \in U(n)$ とすると

$$\begin{aligned} R_A^*\omega &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n d(z_i \circ R_A) \wedge d(\bar{z}_i \circ R_A) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n d\Big(\sum_{j=1}^n a_{ji}z_j\Big) \wedge d\sum_{k=1}^n \overline{a}_{ki}\bar{z}_k \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{j,k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji}\overline{a}_{ki} dz_j \wedge d\bar{z}_k \\ &= \omega \end{aligned}$$

より $U(n)$ の作用は ω を保つ．次に，$X \in \mathfrak{u}(n)$ に対して $\mathbb{C}^n$ 上の基本ベクトル場 $X^\#$ は $X^\#_{\boldsymbol{z}} = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\boldsymbol{z}e^{tX} \in T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}^n$ となる．ここで，$\mathfrak{u}(n)^* = \{\xi \in M_n(\mathbb{C}) :$

${}^t\bar{\xi}+\xi=0\}$ とし, C^∞ 級写像 $\mu:\mathbb{C}^n\to\mathfrak{u}(n)^*$ を

$$\mu(\boldsymbol{z}):=-\frac{\sqrt{-1}}{2}{}^t\bar{\boldsymbol{z}}\boldsymbol{z}=[-\frac{\sqrt{-1}}{2}\bar{z}_iz_j]$$

と定めると

$$\mu(\boldsymbol{z}A)=-\frac{\sqrt{-1}}{2}{}^t\bar{A}{}^t\bar{\boldsymbol{z}}\boldsymbol{z}A=Ad^*_A\mu(\boldsymbol{z})$$

となる. また, $X=[X_{ij}]\in\mathfrak{u}(n)$ に対して $\mu_X(\boldsymbol{z})=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i,j=1}^n\bar{z}_iz_jX_{ij}$ であり

$$\begin{aligned}
i(X^{\#})\omega &= (\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n dz_i\wedge d\bar{z}_i)(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}ze^{tX},\cdot) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n X_{ij}z_jd\bar{z}_i-\sum_{j=1}^n\overline{X_{ij}z_j}dz_i) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n X_{ij}z_jd\bar{z}_i+\sum_{j=1}^n X_{ji}\bar{z}_jdz_i) \\
&= -d\mu_X
\end{aligned}$$

となる. したがって, $\mu:\mathbb{C}^n\to\mathfrak{u}(n)^*$ は運動量写像である.

以下では, G,H を Lie 群, $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ をそれぞれ G,H の Lie 環, $\mathfrak{g}^*,\mathfrak{h}^*$ をそれぞれ $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ の双対空間とする. ここでは, G の随伴作用 $G\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ を $(g,X)\mapsto Ad_{G,g}X$ と書き, 同様に, H の随伴作用 $H\times\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}$ を $(h,Y)\mapsto Ad_{H,h}Y$ と書くことにする. また, G の余随伴作用 $\mathfrak{g}^*\times G\to\mathfrak{g}^*$ を $(\xi,g)\mapsto Ad^*_{G,g}\xi$ と書き, 同様に, H の余随伴作用 $\mathfrak{h}^*\times H\to\mathfrak{h}^*$ を $(\zeta,h)\mapsto Ad^*_{H,h}\zeta$ と書くことにする.

C^∞ 級写像 $\rho:H\to G$ が群の準同型写像であるとき, ρ を **Lie 群の準同型写像**という. このとき, ρ は微分 $\rho_*:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ と引き戻し $\rho^*:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{h}^*$ を誘導する.

補題 4.1.5 任意の $\xi\in\mathfrak{g}^*,h\in H$ に対して

$$\rho^*(Ad^*_{G,\rho(h)}\xi)=Ad^*_{H,h}(\rho^*\xi).$$

証明 任意の $X\in\mathfrak{h}$ に対して, 曲線 $c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to H$ を $c(0)=e_H$, $\dot{c}(0)=X$ とする. ただし, e_H は H の単位元である. このとき

$$\langle\rho^*(Ad^*_{G,\rho(h)}\xi),X\rangle = \langle\xi,Ad_{G,\rho(h)}\rho_*X\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \xi, Ad_{G,\rho(h)} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(c(t)) \rangle \\
&= \langle \xi, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(hc(t)h^{-1}) \rangle \\
&= \langle \xi, \rho_*(Ad_{H,h}X) \rangle \\
&= \langle Ad^*_{H,h}(\rho^*\xi), X \rangle.
\end{aligned}
$$

したがって, $\rho^*(Ad^*_{G,\rho(h)}\xi) = Ad^*_{H,h}(\rho^*\xi)$ となる. □

補題 4.1.6 G がシンプレクティック多様体 (M, ω) に右から作用しているとき, 写像 $M \times H \to M$, $(p, h) \mapsto p\rho(h)$, は H の (M, ω) への右作用となる. このとき, G の作用が ω を保つならば H の作用も ω を保ち, さらに, G の作用についての運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ が存在するとき, 写像 $\rho^*\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ は H の作用についての運動量写像となる.

証明 任意の $g \in G$ に対して, 写像 $R_{G,g} : M \to M$ を $R_{G,g}(p) := pg$ とし, 同様に, 任意の $h \in H$ に対して写像 $R_{H,h} : M \to M$ を $R_{H,h}(p) := p\rho(h)$ とする. このとき, 任意の $h \in H$ に対して $R^*_{H,h}\omega = R^*_{G,\rho(h)}\omega = \omega$ となり, H の作用は ω を保つ. 次に, 任意の点 $p \in M$ と $h \in H$ に対して

$$
\begin{aligned}
(\rho^*\mu)(p\rho(h)) &= \rho^*(\mu(p\rho(h))) \\
&= \rho^*(Ad^*_{G,\rho(h)}\mu(p)) \\
&= Ad^*_{H,h}(\rho^*\mu(p)).
\end{aligned}
$$

また, 任意の $X \in \mathfrak{h}$ に対して $(\rho^*\mu)_X \in C^\infty(M)$ を, 点 $p \in M$ に対して $(\rho^*\mu)_X(p) := \langle (\rho^*\mu)(p), X \rangle$ と定めると

$$
\begin{aligned}
(\rho^*\mu)_X(p) &:= \langle (\rho^*\mu)(p), X \rangle \\
&= \langle \mu(p), \rho_*X \rangle \\
&= \mu_{\rho_*X}(p).
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
i((\rho_*X)^\#)\omega &= -d\mu_{\rho_*X} \\
&= -d(\rho^*\mu)_X.
\end{aligned}
$$

これより, $\rho^*\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ は H の作用についての運動量写像である. □

次の補題は直積を考えることにより直ちに示される.

補題 4.1.7 Lie 群 G_1 がシンプレクティック多様体 (M_1, ω_1) に Hamilton 作用しているとし, $\mu_1 : M_1 \to \mathfrak{g}_1^*$ をその運動量写像とする. 同様に, Lie 群 G_2 がシンプレクティック多様体 (M_2, ω_2) に Hamilton 作用しているとし, $\mu_2 : M_2 \to \mathfrak{g}_2^*$ をその運動量写像とする. このとき, 各 $i = 1, 2$ に対して $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ を第 i 成分への射影とすると, $(M_1 \times M_2, \pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2)$ はシンプレクティック多様体であり, さらに写像 $(M_1 \times M_2) \times (G_1 \times G_2) \to M_1 \times M_2$, $((p_1, p_2), (g_1, g_2)) \mapsto (p_1 g_1, p_2 g_2)$, は $\mu_1 \oplus \mu_2 : M_1 \times M_2 \to \mathfrak{g}_1^* \oplus \mathfrak{g}_2^*$, $(\mu_1 \oplus \mu_2)(p_1, p_2) := (\mu_1(p_1), \mu_2(p_2))$, を運動量写像とする Hamilton 作用である.

Lie 群 G に対して準同型写像 $\rho : G \to G \times G$ を, 任意の $g \in G$ に対して $\rho(g) := (g, g)$ とする. このとき, 引き戻し $\rho^* : \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ は $\rho^*(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + \xi_2$ となる. これと補題 4.1.6, 補題 4.1.7 より次の補題を得る.

補題 4.1.8 Lie 群 G がシンプレクティック多様体 $(M_1, \omega_1), (M_2, \omega_2)$ に Hamilton 作用しているとし, それぞれの運動量写像を $\mu_1 : M_1 \to \mathfrak{g}^*, \mu_2 : M_2 \to \mathfrak{g}^*$ とする. このとき G の $(M_1 \times M_2, \pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2)$ への対角作用 $(M_1 \times M_2) \times G \to M_1 \times M_2$, $(p_1, p_2)g := (p_1 g, p_2 g)$, は Hamilton 作用であり, 写像 $\mu : M_1 \times M_2 \to \mathfrak{g}^*$, $\mu(p_1, p_2) := \mu_1(p_1) + \mu_2(p_2)$, はこの対角作用についての運動量写像である.

また補題 4.1.8 を帰納的に繰り返すことにより, 直積成分が 2 つ以上の対角作用についての運動量写像も各直積成分の運動量写像の和になる.

例 4.1.9 例 4.1.3 における, S^1 の $\mathbb{C}^n$ への作用に関する運動量写像は, S^1 の $(\mathbb{C}, \frac{\sqrt{-1}}{2} dz \wedge \bar{z})$ の n 個の直積への対角作用とみなして, $\mu(z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |z_i|^2 (d\theta)_1$ と計算することもできる.

例 4.1.10 複素係数の $n \times k$ 行列全体のなす集合 $M_{n,k}(\mathbb{C})$ の座標を

$$\begin{bmatrix} z_{11} & & z_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n1} & & z_{nk} \end{bmatrix}$$

と表し, $M_{n,k}(\mathbb{C})$ 上のシンプレクティック形式を $\omega := \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k dz_{ij} \wedge d\bar{z}_{ij}$ とする. また, $U(k)$ の $M_{n,k}(\mathbb{C})$ への右作用 $M_{n,k}(\mathbb{C}) \times U(n) \to M_{n,k}(\mathbb{C})$ を $(Z, A) \mapsto ZA$ とする. ここで, 各 i に対して行ベクトル $\boldsymbol{z}_i := [z_{i1} \ \cdots \ z_{ik}]$ を用

いると, $Z \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ は $Z = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_n \end{bmatrix}$ と表すことができ, $M_{n,k}(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^k$ の n 個の直積 $(\mathbb{C}^k)^n$ と見なすことができる. さらに, $U(k)$ の $M_{n,k}(\mathbb{C})$ への右作用は, $U(k)$ の $(\mathbb{C}^k)^n$ への対角作用と見なすことができるので, 例 4.1.4 と補題 4.1.8 より, C^∞ 級写像 $\mu : M_{n,k}(\mathbb{C}) \to \mathfrak{u}(k)^*$

$$\mu(Z) = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{l=1}^{n} {}^t\bar{\boldsymbol{z}}_l \boldsymbol{z}_l = [-\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{l=1}^{n} \bar{z}_{li} z_{lj}]$$

は運動量写像となる.

この節の最後に余随伴軌道の運動量写像について述べる. G を Lie 群とし, $\xi \in \mathfrak{g}^*$ に対して $\mathcal{O}_\xi$ を余随伴軌道とする. このとき $\mathcal{O}_\xi$ 上の Kirillov–Kostant–Souriau 形式 ω は点 $p \in \mathcal{O}_\xi$ と $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\omega_p(X^\#_p, Y^\#_p) := \langle p, [X, Y] \rangle$$

で与えられた. 以下では G の余随伴作用を $(\mathcal{O}_\xi, \omega)$ に制限して考える.

補題 4.1.11 G の $\mathcal{O}_\xi$ への作用は ω を保つ.

証明 $X \in \mathfrak{g}$ に対して, 曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ を $c(0) = e, \dot{c}(0) = X$ とする. このとき, 任意の $g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} R_{g*}X^\#_p &= R_{g*}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} pc(t) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} pc(t)g \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} pgg^{-1}c(t)g \\ &= (Ad_{g^{-1}}X)^\#_{pg}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} (R_g^*\omega)_p(X^\#_p, Y^\#_p) &= \omega_{pg}(R_{g*}X^\#_p, R_{g*}Y^\#_p) \\ &= \langle pg, [Ad_{g^{-1}}X, Ad_{g^{-1}}Y] \rangle \\ &= \langle pg, Ad_{g^{-1}}[X, Y] \rangle \\ &= \langle p, [X, Y] \rangle \end{aligned}$$

$$= \quad \omega_p(X_p^{\#}, Y_p^{\#})$$

より G の作用は ω を保つ. □

C^∞ 級写像 $\mu : \mathcal{O}_\xi \to \mathfrak{g}^*$ を

$$\mu(p) := p$$

と定める. 定義より直ちに $\mu(pg) = \mu(p)g$ が成り立つ.

補題 4.1.12 $i(X^{\#})\omega = -d\mu_X$.

証明 曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ を $c(0) = e, \dot{c}(0) = Y$ とすると

$$\begin{aligned}
(i(X^{\#})\omega)_p(Y_p^{\#}) &= \omega_p(X_p^{\#}, Y_p^{\#}) \\
&= \langle p, [X, Y] \rangle \\
&= -\langle p, [Y, X] \rangle \\
&= -\langle p, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{c(t)}X \rangle \\
&= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle p, Ad_{c(t)}X \rangle \\
&= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle pc(t), X \rangle \\
&= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \mu(pc(t)), X \rangle \\
&= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu_X(pc(t)) \\
&= -(d\mu_X)_p(Y_p^{\#})
\end{aligned}$$

より $i(X^{\#})\omega = -d\mu_X$ となる. □

以上をまとめて次の命題を得る.

命題 4.1.13 C^∞ 級写像 $\mu : \mathcal{O}_\xi \to \mathfrak{g}^*$, $\mu(p) := p$, は G の $(\mathcal{O}_\xi, \omega)$ への作用についての運動量写像である.

§4.2 シンプレクティック商

この節ではシンプレクティック商について解説する.

まず, 運動量写像の正則値の逆像を理解するために, 補題をいくつか準備する.

補題 4.2.1　Lie 群 G がシンプレクティック多様体 (M,ω) に Hamilton 作用しているとし, $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ をその運動量写像とする. このとき, 点 $p \in M$ に対して

$$\mathrm{Ker}(d\mu)_p = \{v \in T_pM : \text{任意の } X \in \mathfrak{g} \text{ に対して} \omega_p(v, X_p^\#) = 0\}$$

が成り立つ.

証明　$v \in T_pM$ に対して曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = v$ とすると, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle (d\mu)_p(v), X\rangle &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \mu(c(t)), X\rangle \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu_X(c(t)) \\
&= (d\mu_X)_p(v) \\
&= \omega_p(v, X_p^\#)
\end{aligned}$$

となる. したがって, $(d\mu)_p(v) = 0$ と, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\omega_p(v, X_p^\#) = 0$ となることは同値である. □

補題 4.2.2　Lie 群 G がシンプレクティック多様体 (M,ω) に Hamilton 作用しているとし, $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ をその運動量写像とする. このとき, $\dim\{X_p^\# : X \in \mathfrak{g}\} = \dim G$ ならば $(d\mu)_p : T_pM \to T_{\mu(p)}\mathfrak{g}^*$ は全射である.

証明　T_pM の部分空間 V に対して

$$V^\perp := \{u \in T_pM : \text{任意の } v \in V \text{ に対して} \omega_p(u, v) = 0\}$$

と定めると, $\dim T_pM = \dim V + \dim V^\perp$, $(V^\perp)^\perp = V$ である. したがって, 補題 4.2.1 と仮定より

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Im}(d\mu)_p &= \dim T_pM - \dim \mathrm{Ker}(d\mu)_p \\
&= \dim(\mathrm{Ker}(d\mu_p))^\perp \\
&= \dim\{v \in T_pM : \text{任意の } X \in \mathfrak{g} \text{ に対して} \omega_p(v, X_p^\#) = 0\}^\perp \\
&= \dim\{X_p^\# : X \in \mathfrak{g}\} \\
&= \dim G.
\end{aligned}$$

これより, $(d\mu)_p : T_pM \to T_{\mu(p)}\mathfrak{g}^*$ は全射である. □

補題 4.2.3 Lie 群 G が M に右から作用しているとする．点 $p \in M$ の固定化部分群 G_p が離散群ならば, $\dim\{X_p^{\#} : X \in \mathfrak{g}\} = \dim G$ である．

証明 任意の $g \in G$ に対して微分同相写像 $\widetilde{R}_g : G \to G$ を $\widetilde{R}_g(x) := xg$ と定める．また, $X \in \mathfrak{g}$ に対して G 上のベクトル場 $\widetilde{X}$ を $\widetilde{X}_g := (\widetilde{R}_g)_* X$ と定め, 曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ を $c(0) = e$ となる $\widetilde{X}$ の積分曲線とすると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c(t) &= \widetilde{X}_{c(t)} \\ &= (\widetilde{R}_{c(t)})_* X \\ &= (\widetilde{R}_{c(t)})_* \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} c(s) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \widetilde{R}_{c(t)} c(s) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} c(s)c(t) \end{aligned}$$

となる．ここで, $X_p^{\#} = \frac{d}{ds}\big|_{s=0} pc(s) = 0$ とすると, $\frac{d}{dt}\, pc(t) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0} pc(s)c(t) = 0$ より $pc(t) = p$ となる．したがって, G_p は離散群なので $c(t) = e$ となり, $\widetilde{X} = 0$ すなわち $X = 0$ となる．これより, 写像 $\mathfrak{g} \to T_pM$, $X \mapsto X_p^{\#}$, が単射であることが言えたので, $\dim\{X_p^{\#} : X \in \mathfrak{g}\} = \dim G$ が成り立つ． □

補題 4.2.2, 4.2.3 より次の系を得る．

系 4.2.4 Lie 群 G がシンプレクティック多様体 (M, ω) に Hamilton 作用しているとし, $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ をその運動量写像とする．$\xi \in \mathfrak{g}^*$ に対して各点 $p \in \mu^{-1}(\xi)$ の固定化部分群 G_p が離散群ならば, ξ は μ の正則値であり, したがって, $\mu^{-1}(\xi)$ は M の $(\dim M - \dim G)$ 次元部分多様体となる．

この系よりただちに次の定理の前半の主張がしたがう．

定理 4.2.5（Marsden–Weinstein の定理） コンパクト Lie 群 G がシンプレクティック多様体 (M, ω) に Hamilton 作用しているとし, $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ をその運動量写像とする．このとき $\xi \in \mathfrak{g}^*$ に対して次を仮定する．

- 任意の $g \in G$ に対して $\xi g = \xi$. ただし左辺は余随伴作用.
- 各点 $p \in \mu^{-1}(\xi)$ の固定化部分群 G_p は離散群.

このとき, G は $\mu^{-1}(\xi)$ に作用し, 商空間 $\mu^{-1}(\xi)/G$ は $(\dim M - 2\dim G)$ 次元 C^∞ 級多様体となる．さらに, $i : \mu^{-1}(\xi) \to M$ を自然な埋め込み, $\pi : \mu^{-1}(\xi) \to$

$\mu^{-1}(\xi)/G$ を射影とすると, $\mu^{-1}(\xi)/G$ 上のシンプレクティック形式 $\underline{\omega}$ で $\pi^*\underline{\omega} = i^*\omega$ となるものが存在する.

定理 4.2.5 で得られるシンプレクティック多様体 $(\mu^{-1}(\xi)/G, \underline{\omega})$ を**シンプレクティック商**, **シンプレクティック簡約**, または **Marsden–Weinstein 簡約**などとよぶ.

証明 まず, 系 4.2.4 より $\mu^{-1}(\xi)$ は $(\dim M - \dim G)$ 次元 C^∞ 級多様体となる. また, 任意の $g \in G$ に対して $\xi g = \xi$ より, $p \in \mu^{-1}(\xi)$ ならば

$$\mu(pg) = \mu(p)g = \xi g = \xi$$

となり, G は $\mu^{-1}(\xi)$ に作用する. したがって G はコンパクトで $\mu^{-1}(\xi)$ への作用は自由なので, 商空間 $\mu^{-1}(\xi)/G$ は $(\dim M - 2\dim G)$ 次元 C^∞ 級多様体となる.

次に, 点 $p \in \mu^{-1}(\xi)$ において任意の $X \in \mathfrak{g}$ と $v \in T_p\mu^{-1}(\xi)$ に対して $\omega_p(X_p^\#, v) = 0$ となる. 実際に, 曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mu^{-1}(\xi)$ を $c(0) = p, \dot{c}(0) = v$ とすると

$$\begin{aligned} \omega_p(X_p^\#, v) &= -(d\mu_X)_p(v) \\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu_X(c(t)) \\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \mu(c(t)), X \rangle \\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \xi, X \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. これを用いて $\mu^{-1}(\xi)/G$ 上の 2 次微分形式 $\underline{\omega}$ を, 各点 $\underline{p} \in \mu^{-1}(\xi)/G$ と $\underline{u}, \underline{v} \in T_{\underline{p}}(\mu^{-1}(\xi)/G)$ に対して

$$\underline{\omega}_{\underline{p}}(\underline{u}, \underline{v}) := \omega_p(u, v)$$

と定める. ただし, $\pi : \mu^{-1}(\xi) \to \mu^{-1}(\xi)/G$ を射影とし, $p \in \mu^{-1}(\xi)$ は $\pi(p) = \underline{p}$, $u, v \in T_p\mu^{-1}(\xi)$ は $\pi_* u = \underline{u}, \pi_* v = \underline{v}$ となるものとする. このとき, $\underline{\omega}_{\underline{p}}(\underline{u}, \underline{v})$ は p, u, v の選び方によらない. 実際に, まず $u, u' \in T_p\mu^{-1}(\xi)$ を $\pi_* u = \pi_* u' = \underline{u}$ とすると, $\mu^{-1}(\xi)/G$ は G の作用による商空間なので, ある $X \in \mathfrak{g}$ が存在して $u' = u + X_p^\#$ となる. したがって,

$$\omega_p(u', v) = \omega_p(u + X_p^\#, v)$$

$$
\begin{aligned}
&= \omega_p(u,v) + \omega_p(X_p^{\#}, v) \\
&= \omega_p(u,v)
\end{aligned}
$$

となり, $u, u' \in T_p\mu^{-1}(\xi)$ の選び方によらない. v についても同様である. また, $p, p' \in \mu^{-1}(\xi)$ を $\pi(p) = \pi(p') = \underline{p}$ とすると, ある $g \in G$ が存在して $p' = pg$ となる. したがって, $u, v \in T_p\mu^{-1}(\xi)$ に対して $u' := (R_g)_*u, v' := (R_g)_*v$ とすると

$$
\begin{aligned}
\omega_{p'}(u', v') &= \omega_{pg}((R_g)_*u, (R_g)_*v) \\
&= (R_g^*\omega)_p(u,v) \\
&= \omega_p(u,v)
\end{aligned}
$$

となり, $p, p' \in \mu^{-1}(\xi)$ の選び方によらない. また, 定義より $\pi^*\underline{\omega} = i^*\omega$ である.

$\underline{\omega}$ が非退化であることは, まず $\underline{u} \in T_p(\mu^{-1}(\xi)/G)$ が任意の $\underline{v} \in T_p(\mu^{-1}(\xi)/G)$ に対して $\underline{\omega}_{\underline{p}}(\underline{u}, \underline{v}) = 0$ となるとき, $\underline{\omega}$ の定義より $u \in T_p\mu^{-1}(\xi)$ が任意の $v \in T_p\mu^{-1}(\xi)$ に対して $\omega_p(u,v) = 0$ となる. したがって, $T_p\mu^{-1}(\xi) = \mathrm{Ker}(d\mu)_p$ より $u \in (\mathrm{Ker}(d\mu)_p)^{\perp}$. また補題 4.2.1 より $\mathrm{Ker}(d\mu)_p = \{X_p^{\#} : X \in \mathfrak{g}\}^{\perp}$ で $u \in \{X_p^{\#} : X \in \mathfrak{g}\}$ となる. したがって, $\underline{u} = 0$ より, $\underline{\omega}$ は非退化である.

最後に $d\underline{\omega} = 0$ は, 各点 $p \in \mu^{-1}(\xi)$ において $(\pi_*)_p : T_p\mu^{-1}(\xi) \to T_{\underline{p}}(\mu^{-1}(\xi)/G)$ は全射で, $\pi_p^* : T_{\underline{p}}^*(\mu^{-1}(\xi)/G) \to T_p^*\mu^{-1}(\xi)$ は単射となり,

$$
\pi^* d\underline{\omega} = d\pi^*\omega = di^*\omega = i^*d\omega = 0
$$

で $d\underline{\omega} = 0$ である. □

この節の残りでシンプレクティック商の例を挙げる.

例 4.2.6 $S^1 := \{e^{i\theta} \in \mathbb{C}\}$ の Lie 環の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ の基底を $(d\theta)_1$ とし, S^1 の $(M, \omega) := (\mathbb{C}^n, \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i)$ への作用 $\mathbb{C}^n \times S^1 \to \mathbb{C}^n$ を $((z_1, \ldots, z_n), e^{i\theta}) \mapsto (z_1e^{i\theta}, \ldots, z_ne^{i\theta})$ とする. このとき, C^∞ 級写像 $\mu : \mathbb{C}^n \to \mathfrak{g}^*$ を

$$
\mu(z_1, \ldots, z_n) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n |z_i|^2 (d\theta)_1
$$

と定めると, これは運動量写像であった. したがって, $\xi := \frac{1}{2}(d\theta)_1$ に対して

$$
\mu^{-1}(\xi)/S^1 = \Big\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = 1\Big\}/S^1
$$

となる. また, 点 $(z_1,\dots,z_n)\in\mu^{-1}(\xi)$ に列ベクトル $\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}\in\mathbb{C}^n$ の張る $\mathbb{C}^n$ の 1 次元部分空間を対応させることにより, $\mu^{-1}(\xi)/S^1$ は C^∞ 級多様体として $\mathbb{C}P^{n-1}$ となる.

例 4.2.6 を一般化することにより次を得る.

例 4.2.7 複素係数の $n\times k$ 行列全体のなす集合 $M_{n,k}(\mathbb{C})$ の座標を

$$\begin{bmatrix} z_{11} & & z_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n1} & & z_{nk} \end{bmatrix}$$

とし, $M_{n,k}(\mathbb{C})$ 上のシンプレクティック形式を $\omega:=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^k dz_{ij}\wedge d\bar{z}_{ij}$ とする. また, $U(k)$ の $M_{n,k}(\mathbb{C})$ への右作用 $M_{n,k}(\mathbb{C})\times U(n)\to M_{n,k}(\mathbb{C})$ を $(Z,A)\mapsto ZA$ とする. このとき, C^∞ 級写像 $M_{n,k}(\mathbb{C})\to\mathfrak{u}(k)^*$ を

$$\mu(Z)=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{l=1}^n {}^t\bar{\boldsymbol{z}}_l\boldsymbol{z}_l=[-\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{l=1}^n\bar{z}_{li}z_{lj}]$$

と定めると, これは運動量写像であった. ただし, 各 i に対して $\boldsymbol{z}_i:=[z_{i1}\ \cdots\ z_{ik}]$ を行ベクトルとし, 点 $Z\in M_{n,k}(\mathbb{C})$ を $Z=\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_n \end{bmatrix}$ としている. したがって, E を k 次単行列, $\xi:=-\frac{\sqrt{-1}}{2}E$ とすると,

$$\mu^{-1}(\xi)/U(k)=\Big\{Z\in M_{n,k}(\mathbb{C}):\sum_{l=1}^n\bar{z}_{li}z_{lj}=\delta_{ij}\Big\}/U(k)$$

となる. また, 点 $Z\in\mu^{-1}(\xi)$ を $\mathbb{C}^n$ の標準 Hermite 内積に関して正規直交する k 本の列ベクトルの組 $(\begin{bmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{n1} \end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix} z_{1k} \\ \vdots \\ z_{nk} \end{bmatrix})$ とみなすと, 点 $Z\in\mu^{-1}(\xi)$ に $\begin{bmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{n1} \end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix} z_{1k} \\ \vdots \\ z_{nk} \end{bmatrix}$ の張る $\mathbb{C}^n$ の k 次元部分空間を対応させることにより,

$\mu^{-1}(\xi)/U(k)$ は C^∞ 級多様体として $\mathbb{C}^n$ の k 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体 $Gr(k,n)$ となる.

例 4.2.8 各 $i=1,\ldots,n$ に対して正の実数 $r_i>0$ を固定し $\boldsymbol{r}=(r_1,\ldots,r_n)$ とする. ここでは $\mathbb{R}^3$ のベクトルを縦ベクトルで表し, 3 次特殊直交群 $SO(3)$ の $(\mathbb{R}^3)^n$ への右作作用 $(\mathbb{R}^3)^n \times SO(3) \to (\mathbb{R}^3)^n$ を

$$((\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n),A) \mapsto ({}^tA\boldsymbol{x}_1,\ldots,{}^tA\boldsymbol{x}_n)$$

とする. このとき **Polygon 空間** $M_n(\boldsymbol{r})$ を

$$M_n(\boldsymbol{r}) := \left\{(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) \in (\mathbb{R}^3)^n : \begin{array}{l} |\boldsymbol{x}_i| = r_i \ (i=1,\ldots,n) \\ \boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0} \end{array}\right\}/SO(3)$$

と定める.

以下では, $\boldsymbol{r}$ が一般的な場合に $M_n(\boldsymbol{r})$ がシンプレクティック多様体になることを示す.

補題 4.2.9 $A \in SO(3)$ は 1 を固有値に持つ.

証明 単位行列を E とすると ${}^tA = A^{-1}, \det A = 1$ より

$$\begin{aligned}
\det(E-A) &= \det {}^t(E-A) \\
&= \det(E-{}^tA) \\
&= \det(A-E)A^{-1} \\
&= \det(A-E)\det A^{-1} \\
&= (-1)^3 \det(E-A)
\end{aligned}$$

となり, $\det(E-A)=0$ すなわち 1 は A の固有値となる. □

この補題と, $\mathbb{R}^3$ の線形変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ は標準内積を保つことから, 単位行列でない $A \in SO(3)$ の表す $\mathbb{R}^3$ の線形変換は A の固有値 1 の固有ベクトルの方向を軸とする回転となる.

命題 4.2.10 任意の $\varepsilon_i \in \{1,-1\}$ に対して $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i r_i \neq 0$ ならば, $M_n(\boldsymbol{r})$ は $(2n-6)$ 次元シンプレクティック多様体である.

証明 Lie 環 $\mathfrak{so}(3)$ を例 3.3.8 にあるように $\mathbb{R}^3$ と同一視すると, 余随伴作用 $\mathfrak{so}(3)^* \times SO(3) \to \mathfrak{so}(3)^*$ は $\mathbb{R}^3 \times SO(3) \to \mathbb{R}^3$, $(\boldsymbol{x},A) \mapsto {}^tA\boldsymbol{x}$, となる. このと

き, $\xi_i \in \mathbb{R}^3$ を $|\xi_i| = r_i$ とすると余随伴軌道 $\mathcal{O}_{\xi_i}$ は原点を中心とする半径 r_i の 2 次元球面であり, 命題 4.1.13 より $SO(3)$ の $\mathcal{O}_{\xi_i}$ への作用についての運動量写像 $\mu_i : \mathcal{O}_{\xi_i} \to \mathbb{R}^3$ は $\mu_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ となる. したがって, 補題 4.1.8 より $SO(3)$ の直積 $\mathcal{O}_{\xi_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\xi_n}$ への対角作用に関する運動量写像 $\mu : \mathcal{O}_{\xi_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\xi_n} \to \mathbb{R}^3$ は $\mu(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_n$ となる.

ここで, 点 $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \mu^{-1}(\boldsymbol{0})$ が単位行列でない $A \in SO(3)$ に対して $({}^tA\boldsymbol{x}_1, \ldots, {}^tA\boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ であるとすると, 各 $\boldsymbol{x}_i$ は ${}^tA$ の固有値 1 の固有ベクトルで ${}^tA$ の回転の軸に平行となる. したがって, ある $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ が存在して $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i r_i = 0$ となるが, これは仮定に矛盾する. これより各点 $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \mu^{-1}(\boldsymbol{0})$ に対して, その固定化部分群が自明であることがわかり, 定理 4.2.5 より $M_n(\boldsymbol{r}) = \mu^{-1}(\boldsymbol{0})/SO(3)$ はシンプレクティク商として $(2n-6)$ 次元シンプレクティック多様体となる. $\square$

§4.3 複素射影空間上のシンプレクティック形式

$(M, \omega) := (\mathbb{C}^n, \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i)$ とするとき, $S^1 := \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in \mathbb{R}\}$ の $\mathbb{C}^n$ への作用 $\mathbb{C}^n \times S^1 \to \mathbb{C}^n$, $((z_1, \ldots, z_n), e^{i\theta}) \mapsto (e^{i\theta}z_1, \ldots, e^{i\theta}z_n)$, は写像 $\mu : \mathbb{C}^n \to \langle (d\theta)_1 \rangle$, $\mu(z) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n |z_i|^2 (d\theta)_1$, を運動量写像に持つ Hamilton 作用であった. このとき, $\xi := \frac{1}{2}(d\theta)_1$ に対して

$$\mu^{-1}(\xi)/S^1 = \Big\{ z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = 1 \Big\}/S^1$$

となる. また, ω_{FS} を複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上の Fubini–Study 計量から定まる Kähler 形式とする. このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 4.3.1 シンプレクティック商 $(\mu^{-1}(\xi)/S^1, \underline{\omega})$ と $(\mathbb{C}P^{n-1}, \omega_{FS})$ はシンプレクティック微分同相である.

証明 $\mathbb{C}^n$ の原点を 0 と表すとき, $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ の表す商空間 $(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/S^1$ の点を $[(z_1, \ldots, z_n)]$ と書くことにする. また, S^{2n-1} からの射影と埋め込みを

$$\pi : S^{2n-1} \to S^{2n-1}/S^1, \quad i : S^{2n-1} \to \mathbb{C}^n \setminus \{0\},$$

$(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/S^1$ への埋め込みと射影を

$$j : S^{2n-1}/S^1 \to (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/S^1, \quad p : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \to (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/S^1$$

とすると $j \circ \pi = p \circ i$ が成り立つ. 次に, 写像 $\phi : (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/S^1 \to \mathbb{C}P^{n-1}$ を

$$\phi([(z_1, \ldots, z_n)]) := [z_1 : \cdots : z_n]$$

と定めると, $\phi \circ p : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ は正則写像となり, $\phi \circ j : S^{2n-1}/S^1 \to \mathbb{C}P^{n-1}$ は微分同相写像となる.

$\mathbb{C}P^{n-1}$ の非斉次座標近傍 $U := \{[1 : w_1 : \cdots : w_{n-1}] \in \mathbb{C}P^{n-1}\}$ 上で ω_{FS} は

$$\omega_{FS} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}\log(1 + \sum_{i=1}^{n-1}|w_i|^2)$$

と表されるが, $\partial\bar{\partial}\log|z_1|^2 = 0$ に注意すると,

$$\begin{aligned}
p^*\phi^*\omega_{FS} &= (\phi \circ p)^*\frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}\log(1 + \sum_{i=1}^{n-1}|w_i|^2) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}(\phi \circ p)^*\log(1 + \sum_{i=1}^{n-1}|w_i|^2) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}\log(1 + \sum_{i=2}^{n}\left|\frac{z_i}{z_1}\right|^2) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}\{\log(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2) - \log|z_1|^2\} \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}\log(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta_{ij}|z|^2 - z_j\bar{z}_i}{|z|^4}dz_i \wedge d\bar{z}_j
\end{aligned}$$

となる. ここで, $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ とすると

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_j\bar{z}_i dz_i \wedge d\bar{z}_j = \sqrt{-1}d|z|^2 \wedge \sum_{i=1}^{n}(y_i dx_i - x_i dy_i)$$

より $i^*|z|^2 = 1$, $i^*d|z|^2 = di^*|z|^2 = d1 = 0$ に注意して

$$i^*p^*\phi^*\omega_{FS} = i^*\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta_{ij}|z|^2 - z_j\bar{z}_i}{|z|^4}dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

$$= \quad i^*\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^{n} dz_i \wedge d\bar{z}_i$$

となる. したがって, $j \circ \pi = p \circ i$ より

$$\pi^* j^* \phi^* \omega_{FS} = i^* p^* \phi^* \omega_{FS} = i^* \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^{n} dz_i \wedge d\bar{z}_i$$

である. この右辺はシンプレクティック商の構成における $\pi^*\underline{\omega} = i^*\omega$ に等しく, さらに π^* が単射であることから $(\phi \circ j)^*\omega_{FS} = \underline{\omega}$ を得る. したがって, 微分同相写像 $\phi \circ j : S^{2n-1}/S^1 \to \mathbb{C}P^{n-1}$ は $(\phi \circ j)^*\omega_{FS} = \underline{\omega}$ を満たすことから $(S^{2n-1}/S^1, \underline{\omega})$ と $(\mathbb{C}P^{n-1}, \omega_{FS})$ はシンプレクティック微分同相である. $\square$

おわりに

一通り本稿を書き終えてみて, とりあえず当初の目標であった Kähler 多様体, 余随伴軌道, シンプレクティック商のシンプレクティック多様体としての解説と基本的な例の計算については簡潔にまとめることができたのではないかと思っている. ただやはり, ここまで書いておいてトーリック多様体について何も述べないのは中途半端であると改めて感じた. トーリック多様体については [2][3][6][7][8][9] に素晴らしい解説があるが, いつか機会があれば筆者なりの解説を第 5 章として加筆してみたい.

また, 本稿の基になった授業に出席していた学生たちと, 本稿を執筆していたときに修士論文の指導をしていた大学院生たちには, 彼らへの指導を通して筆者自身がシンプレクティック多様体についての学び直しの機会をいただいたことに大変感謝している. どうもありがとうございました.

2023 年 1 月

参考文献

[1] 小林昭七,『複素幾何』, 岩波書店, 2005.
[2] 今野宏,『微分幾何学』, 東京大学出版会, 2013.
[3] 深谷賢治,『シンプレクティック幾何学』, 岩波書店, 2008.
[4] 松本幸夫,『多様体の基礎』, 東京大学出版, 1988.
[5] 村上信吾,『多様体 第 2 版』, 共立出版, 1989.
[6] Audin, M., *Torus Actions on Symplectic Manifolds,* Birkähser, 2004.
[7] Cannas da Silva, A., *Lectures on Symplectic Geometry,* Springer, 2001.
[8] Cannas da Silva, A., *Symplectic Toric manifolds,* https://people.math.ethz.ch/ acannas/Papers/toric.pdf, 2001.
[9] McDuff, D. and Salamon, D., *Introduction to Symplectic Topology,* Oxford Univ. Press, 1998.