学位論文要旨（修士（理学））

論文著者名　佐藤　優太

論文題名：有限体上の多項式環の安定余順自己同型：次数条件を満たさない場合

R を標数 $p \geq 0$ の可換環とし，$R[\mathbf{x}] := R[x_1, \ldots, x_n]$ を R 上の n 変数多項式環とする．$\mathrm{GA}_n(R) := \mathrm{Aut}_R R[\mathbf{x}]$ を $R[\mathbf{x}]$ の R 自己同型群とする．$\phi \in \mathrm{GA}_n(R)$ を $R[\mathbf{x}]$ の元の n 項組 $(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n))$ として書く．$\phi \in \mathrm{GA}_n(R)$ に対して，$\tilde{\phi} := (\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n), x_{n+1})$ と定義し，ϕ と $\tilde{\phi}$ を同一視することで，$\mathrm{GA}_n(R)$ を $\mathrm{GA}_{n+1}(R)$ の部分群とみなす．

$\phi \in \mathrm{GA}_n(R)$ がアフィンであるとは，$A \in \mathrm{GL}_n(R)$, $\mathbf{b} \in R^n$ が存在して，$\phi = (x_1, \ldots, x_n)A + \mathbf{b}$ と書けるときに言い，それら全ての集合を $\mathrm{Aff}_n(R)$ と書く．また各 $f \in R[\hat{x}] := R[x_2, \ldots, x_n]$ に対して $\varepsilon(f) := (x_1 + f, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{GA}_n(R)$ とおき，$\mathcal{E}_n(R) := \{\varepsilon(f) \mid f \in R[\hat{x}]\}$ とする．

群 G の部分集合 $S_1, \ldots, S_r$ と $g_1, \ldots, g_s \in G$ に対して $S_1 \cup \cdots \cup S_r \cup \{g_1, \ldots, g_s\}$ で生成される群を $\langle S_1, \ldots, S_r, g_1, \ldots, g_s \rangle$ で表す．このとき，$\mathrm{TA}_n(R) := \langle \mathrm{Aff}_n(R), \mathcal{E}_n(R) \rangle$ を順部分群といい，その構造に興味がもたれている．例えば $\mathrm{Aff}_n(R) \subsetneq H \subsetneq \mathrm{TA}_n(R)$ を満たす部分群 H が研究されている．興味深い結果として，次の定理が知られている．

定理 1（Derksen [3]）　$n \geq 3$ とし，R を標数 0 の体とする．このとき

$$\langle \mathrm{Aff}_n(R), \varepsilon(x_2^2) \rangle = \mathrm{TA}_n(R)$$

が成り立つ．

この定理の一般化について考えるに当たり，Edo によって以下の定義が与えられた．

定義 2（Edo [2]）　$\phi \in \mathrm{GA}_n(R)$ が**余順** (co-tame) であるとは，$\mathrm{TA}_n(R) \subset \langle \mathrm{Aff}_n(R), \phi \rangle$ を満たすときにいう．

余順よりも弱い概念として，黒田によって以下の定義が与えられた．

定義 3（黒田 [1,Def 1.1]）　$\phi \in \mathrm{GA}_n(R)$ が**安定余順** (stably co-tame) であるとは，$\mathrm{TA}_n(R) \subset \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(R), \phi \rangle$ を満たすときにいう．

余順であれば安定余順である．R が標数 0 の体なら，$\mathrm{GA}_n(R) \setminus \mathrm{Aff}_n(R)$ の元はすべて安定余順であることが知られている [1]．なので，以下では R を標数 $p > 0$ の体とする．

単項式 $ax_1^{t_1}\dots x_n^{t_n}$ $(a\neq 0)$ が**良い単項式**であるとは，以下の (1)〜(4) のいずれかを満たすときにいう [1].

(1) $p\geq 2$ かつ $1\leq i\leq j\leq n$ が存在して $t_i,t_j\equiv 1 \pmod p$.

(2) $p\geq 3$ かつ $1\leq i\leq n$ が存在して $t_i\not\equiv 0,1 \pmod p$.

(3) $n=p=2$ かつ $i,j\in\{1,2\}$ が存在して $t_i\equiv 1$ $t_j\equiv 2 \pmod 4$.

(4) $n=p=2$ かつ $i\in\{1,2\}$ が存在して $t_i\equiv 3 \pmod 4$.

$\phi(x_1),\dots,\phi(x_n)$ に良い単項式が現れないとき，ϕ は安定余順ではないことが知られている [1,Thm2.2].

多項式 $f\in R[\mathbf{x}]$ が以下の条件を満たすとき，f は**次数条件**を満たすという [1].

$$\deg_{x_j}^d f\leq \#R-2 \quad (1\leq \forall j\leq n)$$

ここで現れる $\deg_{x_j}^d f$ は f の x_j の分離次数である．一変数多項式 $g(x)\in R[x]$ の分離次数とは，ある $e\geq 0$ に対して $h(x^{p^e})=g(x)$ をみたすような $h(x)\in R[x]\setminus R[x^p]$ の次数である．R が無限体であれば，任意の $f\in R[\mathbf{x}]$ は次数条件を満たす．次数条件と $\phi\in \mathrm{GA}_n(R)$ の安定余順性について，次の定理が成り立つ．

定理 4（黒田 [1,Thm2.3]） ある $1\leq i\leq n$ に対して，$\phi(x_i)$ に良い単項式が現れ，$\phi(x_i)$ が次数条件を満たすとき，ϕ は安定余順である．

$\phi(x_1),\dots,\phi(x_n)$ に，**良い単項式が現れるが，次数条件を満たさない**多項式がある場合に，$\phi\in \mathrm{GA}_n(R)$ が安定余順であるか否かは，一般には知られていない．この論文では R を有限体とし，$q:=\#R$ とおいて，この場合について研究し，以下の結果を得た．

定理 5 $p\geq 3$ または $p=n=2$, かつ $q\geq 5$ とし，$\phi=(f_1,\dots,f_n)\in \mathrm{GA}_n(R)$ とする．このときある $1\leq i\leq n$ が，以下の 2 つの条件を満たせば，ϕ は安定余順である．

(1) f_i に良い単項式が現れる．

(2) 全ての $1\leq j\leq n$ に対して $\deg_{x_j} f_i\leq q-1$.

参考文献

[1] S. Kuroda, *Stably co-tame polynomial automorphisms over commutative rings*, Transform. Groups **22** (2017), no. 4, 1031–1040. MR3717223

[2] E. Edo, *Coordinates of $R[x,y]$: constructions and classifications*, Comm. Algebra **41** (2013), no. 12, 4694–4710. MR3169546

[3] A. van den Essen, *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin (2000).